REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

DISERTACION

PËR MARRJEN E GRADËS SHKENCORE
DOKTOR

Tema: QASJE NË GJYSMËGRUPE SPECIALE DHE ZBATIME TË TYRE

Paraqitur nga: **M.Sc. Anila Peposhi**

Udhëheqës shkencor: **Prof. Dr. Shkëlqim Kuka**

Tiranë, 2022

UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISE MATEMATIKE DHE INXHINIERISE FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISE MATEMATIKE

DISERTACION

I paraqitur nga

M.Sc. Anila Peposhi

Per marrjen e gradës shkencore

DOKTOR

Programi i studimit: **Analizë Numerike dhe Ekuacione Diferenciale**

Tema: **Qasje në Gjysmëgrupe Speciale dhe Zbatime të Tyre**

Udhëheqës Shkencor: **Prof. Shkëlqim Kuka**

Mbrohet më dt 23. 03. 2022 para jurisë

1. Prof. Dr. Akli Fundo	Kryetar
2. Prof. Dr. Kostaq Hila	Anëtar (oponent)
3. Prof. Asoc. Krisanthi Naka	Anëtar (oponent)
4. Prof. Dr. Lulezim Hanelli	Anëtar
5. Prof. Asoc. Kristaq Gjino	Anëtar

PËRMBLEDHJE

Në kapitullin e parë janë paraqitur disa nocione bazë në gjysmëgrupet ternare. Tregohet që çdo gjysmëgrup i zakonshëm mund të shndërrohet në një gjysmëgrup ternar dhe që e anasjellta në përgjithësi nuk është e vërtetë. Këtu shtrihen shumë koncepte të gjysmëgrupeve të zakonshëm si nëngjysmëgrupi, njëshi, elementi idempotent etj. Gjithashtu është dhënë koncepti i pothuajse nëngjysmëgrupit ternar. Tregohet që bashkimi i dy pothuajse nëngjysmëgrupeve ternare është pothuajse nëngjysmëgrup ternar dhe që prerja e dy pothuasje nëngjysmëgrupeve ternare në përgjithësi nuk është pothuajse nëngjysmëgrup ternar. Jepet koncepti i idealit, pothuajse idealit dhe pothuasje idealit të brendshëm në gjysmëgrupet ternare. Tregohet që bashkimi i dy pothuajse idealeve (pothuajse idealeve të brendshëm) është pothuajse ideal (pothuajse ideal i brendshëm) dhe që prerja e dy pothuasje idealeve (pothuasje idealeve të brendhëm) në përgjithësi nuk është pothuajse ideal (pothuajse ideal i brendshëm)..
Në kapitullin e dytë jepet nocioni i kuazi-idealit dhe bi-idealit në një gjysmëgrup ternar. Këtu paraqiten disa kushte të nevojshme dhe të mjaftueshme në lidhje me kuazi-idealet dhe bi-idealet. Gjithashtu përkufizohet pothuajse kuazi-ideali dhe pothuajse bi-ideali. Tregohet që bashkimi i dy pothuajse kuazi-idealeve (pothuajse bi-idealeve) është pothuajse kuazi-ideal (pothuajse bi-ideal) dhe që prerja e dy pothuasje kuazi-idealeve (pothuasje bi-idealeve) në përgjithësi nuk është pothuajse kuazi-ideal (pothuajse bi-ideal). Gjithashtu tregohet që çdo shtrirje e një pothuasje kuazi-ideali (bi-ideali) është pothuajse kuazi-ideal (bi-ideal).
Në kapitullin e tretë paraqitet koncepti i Γ-gjysmëgrupit ternar si dhe ai i idealit, kuazi-idealit dhe bi-idealit që shtrihen natyreshëm në këto gjysmëgrupe. Gjithashtu jepen disa kushte të nevojshme dhe të mjaftueshme në lidhje më idealet, kuazi-idealet dhe bi-idealet në Γ-gjysmëgrupet ternare. Gjithashtu këtu paraqiten dhe relacionet e Grinit në një Γ-gjysmëgrup ternar.
Në kapitullin e fundit paraqiten kuazi-idealet dhe renditja e pjesshme në një $\Gamma-$gjysmëgrup të rregullt. Më tej përcaktohet mbështjellësja e një $\Gamma-$gjysmëgrupi të rregullt si dhe do jepen disa veti bazë të mbështjellëses. Gjithashtu në këtë pjesë të fundit kemi ngritur dhe disa probleme që lindin natyrshëm në lidhje me mbështjellësen.

Fjalë kyçe: Gjysmëgrup Ternar; Ideal; Kuazi-Ideal; Bi-Ideal; Γ-Gjysmëgrup Ternar; Γ-gjysmëgrup i Rregullt; Bashkësia Sanduiç ; Mbështjellëse.

ABSTRACT

The first chapter presents some basic notions in ternary semigroups. It is shown that any ordinary subsemigroup can be transformed into a ternary subsemigroup and that the reverse is generally not true. Here lie many concepts of ordinary semigroups such as subsemigroup, identity, idempotent element, etc. The concept of almost ternary subsemigroup is also given. It is shown that the union of two almost ternary subsemigroups is almost ternary subsemigroup and that the intersection of two almost ternary subsemigroups is generally not almost a ternary subsemigroup. The concept of ideal, almost ideal and almost internal ideal is given in the ternary semigroups. It is shown that the union of two almost ideals (almost internal ideals) is an almost ideal (almost internal ideal) and that the intersection of two almost ideals (almost internal ideals) is generally not an almost ideal (almost internal ideal).
In the second chapter the notion of quasi-ideal and bi-ideal in a ternary semigroup is given. Here are some necessary and sufficient conditions regarding quasi-ideals and bi-ideals. It is also defined an almost quasi-ideal and almost bi-ideal. It is shown that the union of two almost quasi-ideals (almost bi-ideals) is an almost quasi-ideal (almost bi-ideal) and that the intersection of two almost quasi-ideals (almost bi-ideals) is generally not an almost quasi-ideal (almost bi-ideal). It is also shown that any extension of an almost quasi-ideal (almost bi-ideal) is an almost quasi-ideal (almost bi-ideal).
The third chapter presents the concept of a Γ-ternary semigroup as well as that of the ideal, quasi-ideal and bi-ideal that lie naturally in these subsemigroups. Also some necessary and sufficient conditions are given regarding ideals, quasi-ideals and bi-ideals in Γ-ternary semigroups. Also here are presented Green's relations in a Γ-ternary semigroup.
The last chapter presents quasi-ideals and the partial order in a Γ-regular semigroup. The enlargement of a Γ-regular semigroup is further defined and some basic properties of an enlargement will be given. Also in this last part we have raised some problems that arise naturally regarding the enlargement.

Keywords: Ternary Semigroup; Ideal; Quasi-Ideal; Bi-Ideal; Γ-Ternary Semigroup; Γ-Regular Semigroup; Sandwich Set; Enlargement.

HYRJE

Teoria e gjysmëgrupeve njihet si një ndër teoritë më të rëndësishme në algjebrën abstrakte e cila gjen zbatime të shumta kryesisht në shkencat kompjuterike e veçanërisht në Elektronikë. Termi "gjysmëgrup" u shfaq për herë të parë në literaturën matematike në librin e J. -A. de Séguier′s, Éléments de la Théorie des Groupes Abstraits (Paris, 1904) dhe artikulli i parë mbi gjysmëgrupet u publikua nga L. E. Dickson në 1905 e megjithatë teoria e gjysmëgrupeve në të vërtetë nisi në 1928 me botimin e një artikulli me rëndësi themelore nga A. K. Suschkeitsch.

Në teorinë e gjysmëgrupeve një rëndësi të veçantë kanë nënstrukturat. Këtu përmendim nëngjysmëgrupin si nënstrukturë bazë e një gjysmëgrupi, idealin, kuazi-idealin dhe bi-idealin të cilat trajtohen gjerësisht në këtë punim. Qëllimi i këtij disertacioni është thellimi më tej në studimin e disa klasave gjysmëgrupesh si gjysmëgrupet ternare, Γ-gjysmëgrupet ternare dhe Γ-gjysmëgrupet ternare të rregullt.

Ky punim është i ndarë në katër kapituj. Në kapitullin e parë jepen disa koncepte elementare në lidhje me gjysmëgrupet ternare. Kapitulli është i ndarë në katër paragrafe. Në paragrafin e parë paraqiten disa përkufizime bazë si ai i gjysmëgrupit ternar, nëngjysmëgrupit ternar, pothuajse nëngjysmëgrupit ternar, njëshit dhe elementit idempotent. Gjithashtu paraqiten disa veti bazë të gjysmëgrupeve ternare. Në këtë paragraf tregohet që çdo gjysmëgrup i zakonshëm mund të shndërrohet në një gjysmëgrup ternar dhe që e anasjellta në përgjithësi nuk është e vërtëtë. Gjithashtu tregohet që bashkimi i dy pothuajse nëngjysmëgrupeve ternare është pothuajse nëngjysmëgrup ternar dhe që prerja e dy pothuajse nëngjysmëgrupeve ternare në përgjithësi nuk është pothuajse nëngjysmëgrup ternar. Në paragrafin e dytë paraqitet koncepti i idealit, pothuajse idealit dhe pothuajse idealit të brendshëm. Edhe këtu tregohet që bashkimi i dy pothuajse idealeve (pothuajse idealeve të brendshëm) është pothuajse ideal (pothuajse ideal i brendshëm) dhe që prerja e dy pothuajse idealeve (pothuajse idealeve të brendshëm) në përgjithësi nuk është pothuajse ideal (pothuajse ideal i brendshëm). Më tej tregohet që çdo shtrirje e pothuajse idealit (pothuajse idealit të brendshëm) është pothuajse ideal (pothuajse ideal i brendshëm). Në paragrafin e tretë jepen relacionet e Grinit $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{J}$ në gjysmëgrupet ternare. Në paragrafin e fundit trajtohen disa çështje të rëndësishme lidhur me gjysmëgrupet ternare të rregullt.

Në kapitullin e dytë jepet koncepti i kuazi-idealit, kuazi-idealit minimal, pothuajse kuazi-idealit, bi-idealit dhe pothuajse bi-idealit në gjysmëgrupet ternare. Këtu trajtohen disa veti bazë të këtyre nënstrukturave. Tregohet që bashkimi i dy pothuajse kuazi-idealeve (pothuajse bi-idealeve) është pothuajse kuazi-ideal (pothuajse bi-ideal) dhe që prerja e dy pothuajse kuazi-idealeve (pothuajse bi-idealeve) në përgjithësi nuk është pothuajse kuazi-ideal (pothuajse bi-ideal). Gjithashtu tregohet edhe këtu që çdo shtrirje e pothuajse kuazi-idealit (pothuajse bi-idealit) është pothuajse kuazi-ideal (pothuajse bi-ideal).

Kapitulli i tretë trajton disa karakterizime të rëndësishme të Γ-gjysmëgrupeve ternare. Shumë koncepte dhe pohime të Γ-gjysmëgrupeve shtrihen natyrshëm në Γ-gjysmëgrupet ternare. Këtu trajtohen idealet, kuazi-idealet, bi-idealet, relacionet e grinit dhe kongruencat në Γ-gjysmëgrupet ternare.

Në kapitullin e fundit paraqiten kuazi-idealet dhe renditja e pjesshme në një $\Gamma-$gjysmëgrup të rregullt. Më tej përcaktohet mbështjellësja e një $\Gamma-$gjysmëgrupi të rregullt si dhe jepen disa veti bazë të mbështjellëses. Gjithashtu në këtë pjesë të fundit ngrihen dhe disa probleme që lindin natyrshëm në lidhje me mbështjellësen.

PËRMBAJTJA E LËNDËS

KAPITULLI 1

KONCEPTE ELEMENTARE

Në pjesën e parë të këtij kapitulli paraqiten disa koncepte bazë mbi gjysmëgrupet ternare. Një gjysmëgrup ternar përkufizohet në mënyrë të ngjashme me gjysmëgrupin e zakonshëm (binar) dhe vihet re që shumë nocione dhe rezultate mbi gjysmëgrupet e zakonshëm shtrihen natyrshëm në gjysmëgrupet ternare.

1.1 PËRKUFIZIME BAZË

Një *operacion ternar* në një bashkësi S është një pasqyrim i $SxSxS$ në S ku $SxSxS$ është bashkësia e të gjitha tresheve të radhitura me elementë nga S. Nëse pasqyrimi shënohet $(\cdot)$, imazhi në S i elementit (a,b,c) të $SxSxS$ (a,b dhe c në S) do të shënohet $a\cdot b\cdot c$. Ne shpesh do të shënojmë abc në vend të $a\cdot b\cdot c$.

Një *grupoid* është një sistem $S(\cdot)$ që konsiston në një bashkësi jo-boshe S së bashku me një operacion ternar $(\cdot)$ në S. Ne shpesh do të shkruajmë S në vend të $S(\cdot)$ kur nuk ka ngatërresa.

Një *operacion i pjesshëm ternar* në një bashkësi S është një pasqyrim i një nënbashkësie jo-boshe të $SxSxS$ në S. Me *grupoid të pjesshëm* do të kuptojmë një sistem $S(\cdot)$ që konsiston në një bashkësi jo-boshe S së bashku me një operacion të pjesshëm ternar $(\cdot)$ në S.

PËRKUFIZIM 1.0. [1] *Një gjysmëgrup ternar është një bashkësi jo-boshe S së bashku me një operacion ternar i cili ka vetinë e shoqërimit:*

$$(abc)de = a(bcd)e = ab(cde)$$

për çdo a,b,c,d,e në S.

Le të japim tani disa shembuj gjysmëgrupesh ternare.

SHEMBULL 1.1. Bashkësia e matricave katrore të rendit të dytë $M_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \text{ janë në } R\right\}$ është gjysmëgrup ternar në lidhje me shumëzimin e matricave.

SHEMBULL 1.2. Bashkësia e numrave realë R është gjysmëgrup ternar në lidhje me shumëzimin e numrave realë.

SHEMBULL 1.3. Bashkësia $\{e, a, b, c\}$ është gjysmëgrup ternar në lidhje me operacionin të përcaktuar $xyz = (x * y) * z$ ku operacioni * përcaktohet me anë të tabelës:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Çdo gjysmëgrup i zakonshëm mund të reduktohet në një gjysmëgrup ternar. E anasjellta në përgjithësi nuk është e vërtetë. Këtë gjë e tregon shembulli më poshtë.

SHEMBULL 1.4. [21] Bashkësia $\{-i, 0, i\}$ është gjysmëgrup ternar në lidhje me shumëzimin e numrave kompleksë dhe nuk është gjysmëgrup binar në lidhje me këtë shumëzim.

Le të japim tani nocionin e nëngjysmëgrupit ternar i cili është i ngjashëm me atë të nëngjysmëgrupit të zakonshëm.

PËRKUFIZIM 1.5. [21] *Një nënbashkësi jo-boshe T e gjysmëgrupit ternar S quhet nëngjysmëgrup ternar i S në qoftë se $a \in T, b \in T$ dhe $c \in T$ sjellin $abc \in T$.*

Më poshtë paraqiten disa pohime të ngjashme me ato te gjysmëgrupet e zakonshëm.

POHIM 1.6. *Prerja e çdo bashkësie nëngjysmëgrupesh ternare të gjysmëgrupit ternar S ose është boshe ose është nëngjysmëgrup ternar i S.*

VËRTETIM. Le të jetë $(T_i)_{i\in I}$ një bashkësi çfarëdo jo-boshe nëngjysmëgrupesh ternare të gjysmëgrupit ternar S dhe $a, b, c \in \bigcap_{i\in I} T_i$. Që këtej $a, b, c \in T_i$ për çdo $i \in I$ dhe kështu $abc \in T_i$ për çdo $i \in I$. Kjo do të thotë që $abc \in \bigcap_{i\in I} T_i$.

POHIM 1.7. *Le të jetë A një nënbashkësi jo-boshe e gjysmëgrupit ternar S. Atëherë, prerja e të gjithë nëngjysmëgrupeve ternare të S që përmbajnë A (vetë S është një i tillë) është nëngjysmëgrup* *ternar* $< A >$ *i* S *që përmban* A *dhe përmbahet në çdo nëngjysmëgrup tjetër ternar të* S *që përmban* A.

VËRTETIM. Le të jetë $(T_i)_{i \in I}$ një bashkësi çfarëdo nëngjysmëgrupesh ternare të S të tillë që $A \subseteq T_i$ për çdo $i \in I$. Është e qartë që $A \subseteq \bigcap_{i \in I} T_i$ dhe nga Pohimi 1.6 kemi që $\bigcap_{i \in I} T_i$ është gjithashtu nëngjysmëgrup ternar i S. Le të jetë tani T një nëngjysmëgrup ternar çfarëdo i S që përmban A. Është e qartë që $T = T_{i_0}$ për ndonjë $i_0 \in I$. Kështu $\bigcap_{i \in I} T_i \subseteq T$.

Nëngjysmëgrupi ternar $< A >$ quhet *nëngjysmëgrup ternar i* S *i gjeneruar nga* A. Në qoftë se $< A > = S$ atëherë A quhet *bashkësi gjeneratorësh* e S.
Le të japim tani nocionin e elementit të thjeshtueshëm, gjysmëgrupit ternar ndërrimtar dhe qendrës së një gjysmëgrupi ternar.

PËRKUFIZIM 1.8. [2] *Një gjysmëgrup ternar* S *quhet:*

(i) *majtas i thjeshtueshëm në qoftë se* $abx = aby$ *sjell* $x = y$ *për çdo* a, b, x, y *në* S

(ii) *djathtas i thjeshtueshëm në qoftë se* $xab = yab$ *sjell* $x = y$ *për çdo* a, b, x, y *në* S

(iii) *lateral i thjeshtueshëm në qoftë se* $axb = ayb$ *sjell* $x = y$ *për çdo* a, b, x, y *në* S

(iv) *i thjeshtueshëm në qoftë se* S *është majtas, djathtas dhe lateral i thjeshtueshëm.*

PËRKUFIZIM 1.9. *Tre elementë* a, b *dhe* c *të gjysmëgrupit ternar* S *thuhet se përkëmbehen me njëri-tjetrin në qoftë se* $abc = bca = cab = bac = acb = cba$. *Një gjysmëgrup ternar* S *quhet ndërrimtar në qoftë se çdo tre elementë të tij përkëmbehen me njëri-tjetrin.*

PËRKUFIZIM 1.10. *Një element i gjysmëgrupit ternar* S *i cili përkëmbehet me çdo dy elementë të tij quhet element qendror i* S. *Bashkësia e të gjithë elementëve qendrorë të* S *quhet qendër e* S *dhe shënohet* $Z(S)$.

Pohimi më poshtë tregon që qendra e një gjysmëgrupi ternar është nëngjysmëgrup ternar i tij.

POHIM 1.11. *Qendra* $Z(S)$ *e gjysmëgrupit ternar* S *ose është boshe ose është nëngjysmëgrup ternar i* S.

VËRTETIM. Supozojmë që $Z(S) \neq \emptyset$ dhe le të jenë $a, b, c \in Z(S)$. Për çdo dy elementë $x, y \in S$, $(abc)xy = ab(cxy) = ab(xcy) = ab(xyc) = a(bxy)c = a(xby)c = a(xyb)c = (axy)bc = (xay)bc = (xya)bc = xy(abc)$. Në mënyrë të ngjashme tregohet që $y(abc)x = x(abc)y = (abc)yx = yx(abc)$. Kështu $abc \in Z(S)$.

Më poshtë do shohim përkufizimin e njëshit dhe zeros së një gjysmëgrupi ternar.

PËRKUFIZIM 1.12. [2] *Një element e i gjysmëgrupit ternar S quhet:*

(i) *njësh i majtë i S në qoftë se* $eea = a$ *për çdo* a *në S*

(ii) *njësh i djathtë i S në qoftë se* $aee = a$ *për çdo* a *në S*

(iii) *njësh lateral i S në qoftë se* $eae = a$ *për çdo* a *në S*

(iv) *njësh i dyanshëm i S në qoftë se* e *është njësh i majtë dhe i djathtë i S*

(v) *njësh i S në qoftë se* e *është njësh i majtë, i djathtë dhe lateral i S.*

PËRKUFIZIM 1.13. [21] *Një element z i gjysmëgrupit ternar S quhet zero e S në qoftë se* $zab = zza = zaz = azb = abz = azz = z$ *për çdo* a, b *në* S.

Le të japim tani një shembull që ilustron dy perkufizimet më sipër.

SHEMBULL 1.14. [21] Në intervalin e mbyllur $I = [0,1]$ përcaktojmë $xyz = min(x, y, z)$ ku $x, y, z \in I$. Të tregojmë që 0 është elementi zero dhe 1 është njëshi i I. Për çdo $x \in I$, $1xx = min\{1, x, x\} = x$, $x1x = min\{x, 1, x\} = x$, $xx1 = min\{x, x, 1\} = x$, $11x = min\{1,1, x\} = x$, $1x1 = min\{1, x, 1\} = x$ dhe $1xx = min\{1, x, x\} = x$. Gjithashtu, për çdo $x, y \in I$ kemi që $0xy = min\{0, x, y\} = 0$, $x0y = min\{x, 0, y\} = 0$, $xy0 = min\{x, y, 0\} = 0$, $x00 = min\{x, 0,0\} = 0$, $0x0 = min\{0, x, 0\} = 0$ dhe $x00 = min\{x, 0,0\} = 0$.

POHIM 1.15. [21] *Le të jetë X një bashkësi çfarëdo dhe* (o) *një operacion ternar në X i tillë që* $x\ o\ y\ o\ z = z$ *për çdo* x, y, z *në X. Atëherë X është gjysmëgrup ternar në lidhje me operacionin* (o).

VËRTETIM. $(x\ o\ y\ o\ z)\ o\ u\ o\ w = z\ o\ u\ o\ w = w$, $x\ o\ (y\ o\ z\ o\ u)\ o\ w = x\ o\ u\ o\ w = w$ dhe $x\ o\ y\ o\ (z\ \ o\ u\ o\ w) = x\ o\ y\ o\ w = w$ për çdo x, y, z, u, w në X.

Gjysmëgrupi ternar $X(o)$ quhet *zero gjysmëgrup ternar i djathtë* në X.
Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi:

POHIM 1.16. [21] *Le të jetë X një bashkësi çfarëdo dhe $(*)$ një operacion ternar në X i tillë që $x * y * z = x$ për çdo x, y, z në X. Atëherë X është gjysmëgrup ternar në lidhje me operacionin $(*)$.*

Gjysmëgrupi ternar $X(*)$ quhet *zero gjysmëgrup ternar i majtë* në X.

PËRKUFIZIM 1.17. *Një gjysmëgrup ternar S me elementin zero 0 quhet zero ose nul gjysmëgrup ternar në qoftë se $abc = 0$ për çdo a, b dhe c në S.*

POHIM 1.18. [21] *Le të jetë S një zero gjysmëgrup ternar i majtë. Atëherë S është djathtas i thjeshtueshëm.*

VËRTETIM. Le të jenë a, b, x, y në S të tillë që $xab = yab$. Meqenëse S është zero gjysmëgrup ternar i majtë $xab = x$ dhe $yab = y$. Kështu $x = y$.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi:

POHIM 1.19. [21] *Le të jetë S një zero gjysmëgrup ternar i djathtë. Atëherë S është majtas i thjeshtueshëm.*

Le të jetë S një gjysmëgrup ternar çfarëdo dhe 1 një element i fiksuar i S. E shtrijmë operacionin ternar të S në $S \cup 1$ duke përcaktuar $111 = 1$ dhe $11a = 1a1 = a11 = a$ për çdo a në S. Në këtë mënyrë S i kemi atashuar njëshin 1. Në mënyrë të ngjashme S i atashojmë elementin zero 0 duke përcaktuar $000 = 0ab = a0b = ab0 = 0$ për çdo a, b, c në S. Kështu kemi shënimet:

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{nqs } S \text{ ka njësh} \\ S \cup 1 & \text{ndryshe} \end{cases} \qquad S^0 = \begin{cases} S & \text{nqs } S \text{ ka zero} \\ S \cup 0 & \text{ndryshe .} \end{cases}$$

PËRKUFIZIM 1.20. [21] *Një element e i gjysmëgrupit ternar S quhet idempotent në qoftë se $eee = e$. Një gjysmëgrup ternar S quhet idempotent në qoftë se çdo element i tij është idempotent.*

Është e qartë që zeroja është një element idempotent. E anasjellta në përgjithësi nuk është e vërtetë.

Bashkësitë $\{0\}$, $\{1\}$ dhe $\{e\}$ ku e është idempotent, janë nëngjysmëgrupe ternare të S.

POHIM 1.21. [21] *Le të jetë e një element idempotent i gjysmëgrupit ternar S majtas të thjeshtueshëm. Atëherë e është njësh i majtë i S.*

VËRTETIM. Për çdo $a \in S$, $eea = eeeeeea$ dhe meqenëse S është majtas i thjeshtueshëm kemi që $a = eeeea$ dhe meqenëse $eee = e$ rrjedh që $a = eea$.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi:

POHIM 1.22. [21] *Le të jetë e një element idempotent i gjysmëgrupit ternar S djathtas të thjeshtueshëm. Atëherë e është njësh i djathtë i S.*

PËRKUFIZIM 1.23. [1] *Një gjysmëgrup ternar G quhet grup në qoftë se për çdo tre elementë të dhënë a, b dhe c të G, ekzistojnë elementët e vetëm x, y dhe z të G të tillë që $abx = c, ayb = c$ dhe $zab = c$.*

Në qoftë se G është një grup, atëherë $G^0 = G \cup \{0\}$ është gjysmëgrup. Ne do ta quajmë gjysmëgrupin e formuar në këtë mënyrë 0 *−grup ose grup-me-zero.*

POHIM 1.24. *Një gjysmëgrup me zero është 0 −grup vetëm atëherë kur $\forall a, b \in S\setminus\{0\}, abS = S, aSb = S$ dhe $Sab = S$.*

VËRTETIM. Së pari supozojmë që $S = G^0$ është një 0 −grup dhe le të jenë $a, b, c \in G = S\setminus\{0\}$. Është e qartë që $abS = S, aSb = S$ dhe $Sab = S$. Meqenëse $abS = abG \cup \{0\}, aSb = aGb \cup \{0\}$ dhe $Sab = Gab \cup \{0\}$ rrjedh që $abS = S, aSb = S$ dhe $Sab = S$.
Anasjelltas, supozojmë që S ka vetinë e dhënë dhe le të jetë $G = S\setminus\{0\}$. Meqenëse nga kushti S ka më shumë se tre elementë, kemi që $G \neq \emptyset$. Për të treguar që G është grup duhet të tregojmë së pari që G është e mbyllur në lidhje me shumëzimin. Kështu, supozojmë të kundërtën që ekzistojnë a, b, c në G të tillë që $abc = 0$. Atëherë $S^3 = (Sab)(caS)S = S(abc)aSS = S0aSS = \{0\}$ dhe kështu $S = abS \subseteq S^3 = \{0\}$. Ky është një kontradiksion dhe kështu G ka vetinë e dëshiruar të mbylljes. Vetia e supozuar implikon që për çdo a, b, c në G ekzistojnë x, y, z në G të tillë që $abx = c, ayb = c$ dhe $zab = c$. Kështu G është grup.

PËRKUFIZIM 1.25. [2] *Një element a i gjysmëgrupit ternar S quhet i invertueshëm në qoftë se ekziston një element b në S i tillë që $abx = bax = xab = xba = x$ për çdo x në S.*

PËRKUFIZIM 1.26. *Një nëngjysmëgrup ternar T i gjysmëgrupit ternar S quhet nëngrup i S në qoftë se T është grup në lidhje me operacionin ternar të përcaktuar në S.*

Përkufizimi 1.26 është ekuivalent me atë që T është nëngrup ternar i S i tillë që në qoftë se për $a, b, c \in T$ ekzistojnë elementët e vetëm x, y, z në T të tillë që $abx = ayb = zab = c$.
Në qoftë se A, B dhe C janë nënbashkësi të gjysmëgrupit ternar S, atëherë me *bashkësi prodhim* ABC të A, B dhe C do të kuptojmë bashkësinë e të gjithë elementëve abc të S me a në A, b në B dhe c në C. Në qoftë se $A = \{a\}$ ne gjithashtu do të shkruajmë ABC si aBC dhe në mënyrë të ngjashme AbC në qoftë se $B = \{b\}$, ABc në qoftë se $C = \{c\}$. Kështu $ABC = \cup\{aBC: a \in A\} = \cup\{AbC: b \in B\} = \cup\{ABc: c \in C\}$. Është e lehtë të tregohet që për të gjitha nënbashkësitë A, B, C, D, E të S kemi që $(ABC)DE = A(BCD)E = AB(CDE)$; kështu që $ABCDE$ ka kuptim. Gjithashtu A^3 është bashkësia e të gjithë elementëve $a_1a_2a_3$ ku $a_1, a_2, a_3 \in A$.

PËRKUFIZIM 1.27. *Një nënbashkësi A e gjysmëgrupit ternar S quhet pothuajse nëngjysmëgrup ternar i S në qoftë se $A^3 \cap A \neq \emptyset$.*

Le të jetë A një nëngjysmëgrup ternar i gjysmëgrupit ternar S. Atëherë $A^3 \subseteq A$. Kjo tregon që $A^3 \cap A \neq \emptyset$ dhe kështu A është pothuajse nëngjysmëgrup ternar i S.

SHEMBULL 1.28. Konsiderojmë gjysmëgrupin ternar $(N, \cdot)$. Le të jenë $A = \{2, 8\}$ dhe $B = \{8, 512\}$. Është e qartë që A dhe B janë pothuajse nëngjysmëgrupe ternare por nuk janë nëngjysmëgrupe ternare të N. Gjithashtu $A \cap B = \{8\}$ nuk është pothuajse nëngjysmëgrup ternar i N.
Nga shembulli më sipër marrim konkluzionet si më poshtë:
(1) Çdo pothuajse nëngjysmëgrup ternar i gjysmëgrupit ternar S mund të mos jetë nëngjysmëgrup ternar i S
(2) Prerja e pothuajse nëngjysmëgrupeve ternare të një gjysmëgrupi ternar S mund të mos jetë pothuajse nëngjysmëgrup ternar i S.

TEOREMË 1.29. *Le të jenë A dhe B dy nënbashkësi joboshe të një gjysmëgrupi ternar S të tillë që $A \subseteq B$. Në qoftë se A është pothuajse nëngjysmëgrup ternar i S atëherë B është gjithashtu pothuajse nëngjysmëgrup ternar i S.*

VËRTETIM. Supozojmë që A është pothuajse nëngjysmëgrup ternar i S. Kështu $A^3 \cap A \neq \emptyset$ dhe $A^3 \cap A \subseteq B^3 \cap B$ sepse $A \subseteq B$. Kjo tregon që $B^3 \cap B \neq \emptyset$ gjë që përfundon vërtetimin.

RRJEDHIM 1.30. *Bashkimi i pothuajse nëngjysmëgrupeve ternare të gjysmëgrupit ternar S është gjithashtu pothuajse nëngjysmëgrup ternar i S.*

POHIM 1.31. Le të jetë a një element çfarëdo i gjysmëgrupit ternar S.

(1) Në qoftë se a është një element idempotent, atëherë $\{a\}$ është pothuajse nëngjysmëgrup ternar i S.

(2) $\{a, a^3\}$ është pothuajse nëngjysmëgrup ternar i S.

TEOREMË 1.32. *Çdo gjysmëgrup ternar S i tillë që $|S| > 1$ ka një pothuajse nëngjysmëgrup ternar të mirëfilltë.*

VËRTETIM Supozojmë që S nuk ka pothuajse nëngjysmëgrupe ternare të mirëfilltë. Kështu S nuk ka idempotentë nga Pohimi 1.31 (1). Nga Pohimi 1.31 (2) marrim që S përmban vetëm tre elementë të themi $S = \{a, b, c\}$. Meqenëse S nuk ka idempotentë $a^3 = b$ ose $a^3 = c, b^3 = a$ ose $b^3 = c$ dhe $c^3 = a$ ose $c^3 = b$. Konsiderojmë $abc = aa^3a^3 = a^3a^3a = cba$. Në qoftë se $abc = a$ atëherë $a = b^3 = a^3bc = a^3$. Në mënyrë të ngjashme, në qoftë se $abc = b$ marrim $b = b^3$ dhe në qoftë se $abc = c$ kemi $c = c^3$ të cilat përbëjnë një kontradiksion . Kështu, S ka pothuajse nëngjysmëgrupe të mirëfillta.

PËRKUFIZIM 1.33. [21] *Le të jenë S_1 dhe S_2 dy gjysmëgrupe ternare. Pasqyrimi $f: S_1 \to S_2$ quhet homomorfizëm në qoftë se $f(abc) = f(a)f(b)f(c)$.*

1.2 IDEALET NË GJYSMËGRUPET TERNARE

Në këtë pjesë do paraqesim kuptimin e idealit në gjysmëgrupet ternare si dhe disa rezultate të rëndësishme lidhur me to.

PËRKUFIZIM 1.34. [1] *Një nënbashkësi jo-boshe A e gjysmëgrupit ternar S quhet:*

(i) *ideal i majtë i S në qoftë se SSA* $\subseteq A$

(ii) *ideal i djathtë i S në qoftë se ASS* $\subseteq A$

(iii) *ideal lateral i S në qoftë se SAS* $\subseteq A$

(iv) *ideal i dyanshëm i S në qoftë se A është ideal i majtë dhe i djathtë i S*

(v) *ideal i S në qoftë se A është ideal i majtë, i djathtë dhe lateral i* S.

POHIM 1.35. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar pa zero* 0. *Atëherë, prerja e një bashkësie çfarëdo idealesh të majtë të S ose është boshe ose është ideal i majtë i* S.

VËRTETIM. Le të jetë $(L_i)_{i\in I}$ një bashkësi çfarëdo jo-boshe idealesh të majtë të S. Për çdo $a \in \bigcap_{i\in I} L_i$ dhe $s_1, s_2 \in S$ kemi që $a \in L_i$ për çdo $i \in I$. Kështu $s_1 s_2 a \in L_i$ për çdo $i \in I$. Që nga $s_1 s_2 a \in \bigcap_{i\in I} L_i$.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi:

POHIM 1.36. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar pa zero* 0. *Atëherë, prerja e një bashkësie çfarëdo idealesh të djathtë [lateralë] të S ose është boshe ose është ideal i djathtë [lateral] i* S.

POHIM 1.37. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar me zero* 0. *Atëherë, bashkësia* $\{0\}$ *është ideal i* S.

VËRTETIM. Për çdo $a, b \in S, ab0 = 0 \in \{0\}$. Kjo tregon që $\{0\}$ është ideal i majtë i S. Gjithashtu $a0b = 0 \in \{0\}$ që tregon se $\{0\}$ është ideal lateral i S. Nga ana tjetër $0ab = 0 \in \{0\}$ që do të thotë se $\{0\}$ është ideal i djathtë i S.

Ideali $\{0\}$ quhet *ideali zero* i S.

PËRKUFIZIM 1.38. [21] *Një ideal I i gjysmëgrupit ternar S me zero* 0 *quhet i mirëfilltë në qoftë se* $I \neq \{0\}$ *dhe* $I \neq S$.

Idealet $\{0\}$ dhe vetë S (S është ideal i vetvetes) quhen ideale *jo të mirëfillta* të S.

PËRKUFIZIM 1.39. [21] *Një gjysmëgrup ternar S quhet:*

(i) *majtas i thjeshtë në qoftë se S nuk ka ideale të majtë të mirëfilltë*

(ii) *djathtas i thjeshtë në qoftë se S nuk ka ideale të djathtë të mirëfilltë*

(iii) *lateral i thjeshtë në qoftë se S nuk ka ideale lateralë të mirëfilltë*

(iv) *i thjeshtë në qoftë se S nuk ka ideale të mirëfilltë.*

Duket qartë se çdo ideal i majtë [i djathtë, lateral, i dyanshëm, ideal] i gjysmëgrupit ternar S është nëngjysmëgrup ternar i S.

POHIM 1.40. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar me zero* 0. *Atëherë, çdo ideal i majtë i S e përmban* 0.

VËRTETIM. Le të jetë L një ideal i majtë çfarëdo i gjysmëgrupit ternar S. Atëherë, për çdo $a \in L$ dhe $s \in S$ kemi që $0 = s0a = 0sa = 00a \in L$.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi:

POHIM 1.41. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar me zero* 0. *Atëherë, çdo ideal i djathtë [lateral] i S e përmban* 0.

POHIM 1.42. [21] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Atëherë, SSa është ideal i majtë i S, për çdo a në S.*

VËRTETIM. Për çdo $x, y, s_1, s_2 \in S$ kemi që $s_1s_2(xya) = (s_1s_2x)ya \in SSa$.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi:

POHIM 1.43. [21] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Atëherë, aSS është ideal i majtë i S, për çdo a në S.*

POHIM 1.44. [21] *Një gjysmëgrup ternar S është majtas i thjeshtë* vetëm atëherë kur *$SSa = S$ për çdo a në S.*

VËRTETIM. Për çdo a në $S, SSa \subseteq S$. Nga Pohimi 1.42 kemi që SSa është ideal i majtë i S dhe meqenëse S është majtas i thjeshtë kemi që $SSa = S$.

Anasjelltas, le të jetë L një ideal i majtë i S. Për çdo $a \in L$ kemi $SSa = L$. Që këtej, për çdo $x \in S, x = bca$ ku $b, c \in S$ dhe meqenëse L është ideal i majtë i S kemi që $x \in L$. Kështu $S \subseteq L$. Nga ana tjetër është e qartë që $L \subseteq S$. Kështu $L = S$.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi:

POHIM 1.45. [21] *Një gjysmëgrup ternar S është djathtas i thjeshtë* **vetëm atëherë kur** $aSS = S$ *për çdo* a *në* S.

POHIM 1.46. *Për çdo* $a \in S, SaS$ *është ideal i dyanshëm i* S.

VËRTETIM. Për çdo $a, x, y, s_1, s_2 \in S$ kemi që $s_1s_2(xay) = (s_1s_2x)ay \in SaS$. Kjo tregon që SaS është ideal i majtë i S. Nga ana tjetër $(xay)s_1s_2 = xa(ys_1s_2) \in SaS$ që nga SaS është ideal i djathtë i S.

Në qoftë se A është një nënbashkësi jo-boshe e gjysmëgrupit ternar S, prerja e të gjithë idealeve të majtë [të djathtë, lateralë] të S që përmbajnë A (vetë S është një i tillë) është ideal i majtë [i djathtë, lateral] i S që përmban A dhe përmbahet në çdo ideal të majtë [të djathtë, lateral] të S që përmban A.

PËRKUFIZIM 1.47. [1] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar dhe A një nënbashkësi jo-boshe e* S.

(i) $A \cup SSA$ *quhet ideal i majtë i* S *i gjeneruar nga* A

(ii) $A \cup ASS$ *quhet ideal i djathtë i* S *i gjeneruar nga* A

(iii) $A \cup SAS \cup SSASS$ *quhet ideal lateral i* S *i gjeneruar nga* A

(iv) $A \cup SSA \cup ASS \cup SAS \cup SSASS$ *quhet ideal i* S *i gjeneruar nga* A.

Në qoftë se A konsiston vetëm në një element a, atëherë do të quajmë $(a)_l = a \cup SSa, (a)_r = a \cup aSS, (a)_m = a \cup SaS \cup SSaSS$ dhe $(a) = a \cup SSa \cup aSS \cup SaS \cup SSaSS$ *ideal kryesor i majtë, i djathtë, lateral dhe ideal kryesor i gjeneruar nga* a.

POHIM 1.48. [21] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Atëherë, për çdo* $a \in S, (a)_rSS = aSS$ *dhe* $SS(a)_l = SSa$.

VËRTETIM. Të tregojmë fillimisht që $(a)_r SS = aSS$. Është e qartë që $aSS \subseteq (a)_r SS$, për çdo $a \in$ S. Le të jetë tani $x \in (a)_r, s_1, s_2 \in S$. Në qoftë se $x = a$ atëherë $xs_1s_2 = as_1s_2 \in aSS$. Në qoftë se $x \in aSS, x = as_3s_4$ ku $s_3, s_4 \in S$. Atëherë $xs_1s_2 = (as_3s_4)s_1s_2 = as_3(s_4s_1s_2) \in aSS$. Kështu $(a)_r SS = aSS$. Le të tregojmë tani që $SS(a)_l = SSa$. Është e qartë që $SSa \subseteq SS(a)_l$. Le të jenë $s_1, s_2 \in S$ dhe $x \in (a)_l$.Në qoftë se $x = a, s_1s_2x = s_1s_2a \in SSa$. Në qoftë se $x \in SSa, x = s_3s_4a$ku$s_3, s_4 \in S$.Atëherë $s_1s_2x = s_1s_2(s_3s_4a) = (s_1s_2s_3)s_4a \in SSa$.Kështu dhe $SS(a)_l \subseteq SSa$.

POHIM 1.49. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Atëherë, bashkimi i një bashkësie çfarëdo idealesh të majtë të S është ideal i majtë i S.*

VËRTETIM. Le të jetë $(L_i)_{i \in I}$ një bashkësi çfarëdo idealesh të majtë të S. Për çdo $s_1, s_2 \in S$ dhe për çdo $a \in \bigcup_{i \in I} L_i$, $a \in L_{i_0}$ për ndonjë $i_0 \in I$. Kështu $s_1s_2a \in L_{i_0}$ sepse L_{i_0} është ideal i majtë i S. Nga ana tjetër $L_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} L_i$. Kështu $s_1s_2a \in \bigcup_{i \in I} L_i$.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi:

POHIM 1.50. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Atëherë, bashkimi i një bashkësie çfarëdo idealesh të djathtë [lateralë] të S është ideal i djathtë [lateral] i S.*

POHIM 1.51. [21] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar, L një ideal i majtë i S dhe X një nënbashkësi jo-boshe e S. Atëherë LXX është ideal i majtë i S.*

VËRTETIM. Le të jetë $a \in L, x_1, x_2 \in X$ dhe $s_1, s_2 \in S$. Atëherë $s_1s_2(ax_1x_2) = (s_1s_2a)x_1x_2 \in LXX$ sepse $s_1s_2a \in L$ meqenëse L është ideal i majtë i S.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi:

POHIM 1.52. [21] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar, R një ideal i djathtë i S dhe X një nënbashkësi jo-boshe e S. Atëherë XXR është ideal i djathtë i S.*

POHIM 1.53. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar, L një ideal i majtë i S, R një ideal i djathtë i S dhe M një ideal lateral i S. Atëherë LMR është ideal i dyanshëm i S. Për më tepër $RML \subseteq R \cap M \cap L$.*

VËRTETIM. Le të jenë $a \in L, b \in M, c \in R$ dhe $s_1, s_2 \in S$. Atëherë $s_1 s_2(abc) = (s_1 s_2 a)bc \in LMR$ sepse $s_1 s_2 a \in L$ meqenëse L është ideal i majtë i S. Kështu LMR është ideal i majtë i S. Gjithashtu $(abc)s_1 s_2 = ab(cs_1 s_2) \in LMR$ sepse $cs_1 s_2 \in R$ meqenëse R është ideal i djathtë i S. Kështu LMR është ideal i djathtë i S. Të tregojmë tani që $RML \subseteq R \cap M \cap L$. Le të jenë $a \in R, b \in M$ dhe $c \in L$. Atëherë $abc \in R$ sepse R është ideal i djathtë i S. Gjithashtu $abc \in M$ sepse M është ideal lateral i S. Nga ana tjetër $abc \in L$ sepse L është ideal i majtë i S. Kjo do të thotë që $abc \in R \cap M \cap L$.

POHIM 1.54. [21] *Le të jetë A një ideal i dyanshëm i gjysmëgrupit ternar S dhe B një ideal i dyanshëm i A i tillë që $B^3 = B$. Atëherë B është ideal i dyanshëm i S*

VËRTETIM. Meqenëse $B^3 = B$ kemi $SSB = SSBBB \subseteq SSAAB \subseteq AAB \subseteq B$ gjë që tregon që B është ideal i majtë i S. Gjithashtu $BSS = BBBSS \subseteq BAASS \subseteq BAA \subseteq B$ gjë që tregon që B është ideal i djathtë i S.

PËRKUFIZIM 1.55. [1] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Një ideal I i S quhet:*

(i) ideal fortësisht jo i reduktueshëm në qoftë se $I_1 \cap I_2 \subseteq I$ sjell që $I_1 \subseteq I$ ose $I_2 \subseteq I$

(ii) ideal dobët jo i reduktueshëm në qoftë se $I_1 \cap I_2 = I$ sjell që $I_1 = I$ ose $I_2 = I$

për çdo dy ideale I_1 dhe I_2 të S.

PËRKUFIZIM 1.56. [1] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Një ideal P i S quhet:*

(i) ideal prim në qoftë se $I_1 I_2 I_3 \subseteq P$ sjell që $I_1 \subseteq P$ ose $I_2 \subseteq P$ ose $I_3 \subseteq P$ për çdo tre ideale I_1, I_2, I_3 të S

(ii) ideal plotësisht prim në qoftë se $xyz \in P$ sjell që $x \in P$ ose $y \in P$ ose $z \in P$ për çdo tre elementë x, y, z të S.

PËRKUFIZIM 1.57. [1] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Një ideal T i S quhet:*

(i) semiprim në qoftë se $III \subseteq T$ sjell që $I \subseteq T$ për çdo ideal I të S

(ii) plotësisht semiprim në qoftë se $xxx \in T$ sjell që $x \in T$ për çdo element x të S.

PËRKUFIZIM 1.58. [1] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Një nënbashkësi X e S quhet:*

(i) *m-sistem në qoftë se për çdo* $a, b, c \in S$ *ekzistojnë* x_1, x_2, x_3, x_4 *që ndodhen në* S *të tillë që* $ax_1bx_2 \in X$ *ose* $ax_1x_2bx_3x_4c \in X$ *ose* $ax_1x_2bx_3cx_4 \in X$ *ose* $x_1ax_2bx_3x_4 \in X$
(ii) *p-sistem në qoftë se për çdo* $a \in S$ *ekzistojnë* x_1, x_2, x_3, x_4 *që ndodhen në* S *të tillë që* $ax_1ax_2a \in X$ *ose* $ax_1x_2ax_3x_4a \in X$ *ose* $ax_1x_2ax_3ax_4 \in X$ *ose* $x_1ax_2ax_3x_4a \in X$.

Në vijim le të paraqesim vërtetimin e disa prej pohimeve dhe teoremave të formuluara nga [1].

TEOREMË 1.59. *Një element* x *i gjysmëgrupit ternar* S *i përket idealit prim* P *vetëm atëherë kur* $SxS \subseteq P$.

VËRTETIM. Në qoftë se $x \in P$ ku P është një ideal prim i S atëherë është e qartë që $SxS \subseteq P$. Anasjelltas, supozojmë që $SxS \subseteq P$ ku P është ideal prim i S. Atëherë $SSxSS \subseteq SPS \subseteq P$ dhe për $I_1 = I_2 = I_3 = (x)$kemi$(x)(x)(x) = (x)x(x) \cup (x)SSx(x) \cup (x)xSS(x) \cup (x)SxS(x) \cup (x)SSxSS(x) \subseteq SxS \cup SSxSS\ P$. Meqenëse P është ideal prim kemi që $(x) \subseteq P$. Kështu $x \in P$.

PËRKUFIZIM 1.60. [1] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Një ideal M i S quhet ideal maksimal që përmban një ideal I të S në qoftë se M përmban I dhe nuk ekziston asnjë ideal tjetër i mirëfilltë i S që të përmbajë I dhe M të përmbahet në mënyrë të mirëfilltë në të.*

PËRKUFIZIM 1.61. [1] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Një ideal prim P quhet ideal prim minimal që përmban një ideal I të S në qoftë se P përmban I dhe nuk ekziston asnjë ideal tjetër prim që përmban I dhe që përmbahet në mënyrë të mirëfilltë në P.*

PËRKUFIZIM 1.62. [1] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Një ideal semiprim Q i S quhet ideal semiprim minimal që përmban idealin I në qoftë se Q përmban I dhe nuk ekziston asnjë ideal tjetër semiprim që të përmbajë I dhe të përmbahet në mënyrë të mirëfilltë në* Q.

TEOREMË 1.63. *Le të jetë* S *një gjysmëgrup ternar,* X *një* p-*sistem dhe* I *një ideal i* S *i tillë që* $\mathrm{X} \cap \mathrm{I} = \emptyset$. *Atëherë ekziston një ideal maksimal* M *që përmban* I *i tillë që* $\mathrm{X} \cap \mathrm{M} = \emptyset$. *Për më tepër* M *është ideal semiprim i* S.

VËRTETIM. Bashkësia e idealeve të *S* që përmban idealin *I* e cila e ka prerjen boshe me *X* është jo-boshe dhe pjesërisht e renditur në lidhje me relacionin e përfshierjes. Çdo zinxhir idealesh të

tillë ka kufi të sipërm që është bashkimi i tyre. Kështu, nga Lema e Zornit, bashkësia në fjalë përmban element maksimal M. Supozojmë se M nuk është ideal semiprim dmth për ndonjë ideal I kemi që $III \subseteq M$ por $I \not\subset M$. Atëherë, vëmë re që ideali $I \cup M$ përmban M në mënyrë të mirëfilltë dhe kështu, nga maksimaliteti i M do ta presi X të themi në një pikë a. Kështu, nga përcaktimi i X, ekzistojnë $x_1, x_2, x_3, x_4 \in S$ të tillë që $ax_1ax_2a \in X$ ose $ax_1x_2ax_3x_4a \in X$ ose $ax_1x_2ax_3ax_4 \in X$ ose $x_1ax_2ax_3x_4a \in X$. Për më tepër, vëmë në dukje që $(I \cup M) \cap X = (I \cap X) \cup (M \cap X) = I \cap X$. Kështu $a \in I$. Në qoftë se $ax_1ax_2a \in X$ atëherë $ax_1ax_2a = a(x_1ax_2)a \in III \subseteq M$. Në qoftë se $ax_1x_2ax_3x_4a \in X$, atëherë $ax_1x_2ax_3x_4a = (ax_1x_2)a(x_3x_4a) \in III \subseteq M$. Në qoftë se $x_1ax_2ax_3x_4a \in X$, atëherë $x_1ax_2ax_3x_4a = (x_1ax_2)a(x_3x_4a) \in III \subseteq M$. Në qoftë se $ax_1x_2ax_3ax_4 \in X$,atëherë $ax_1x_2ax_3ax_4 = (ax_1x_2)a(x_3ax_4) \in III \subseteq M$.
Në çdo rast kemi kontradiksionin $M \cap X \neq \emptyset$.

TEOREMË 1.64. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Atëherë, një nënbashkësi Q e S është ideal semiprim minimal që përmban I vetëm atëherë kur $S - Q$ është një p-sistem maksimal i tillë që $(S - Q) \cap I = \emptyset$.*

VËRTETIM. Le të jetë Q (një nënbashkësi e S) një ideal semiprim minimal që përmban I. Atëherë $S - Q$ është një p-sistem me $S - Q \subseteq S - I$ i tillë që $(S - Q) \cap I \subseteq (S - I) \cap I = \emptyset$. Supozojmë që Y është një p-sistem maksimal (Lema e Zornit) i tillë që $Y \cap I = \emptyset$ dhe $Y \supseteq S - Q$. Le të jetë M një ideal maksimal që përmban I dhe i tillë që $M \cap Y = \emptyset$. Nga Teorema 1.57 M është gjithashtu ideal semiprim dhe $I \subseteq M \subseteq S - Y \subseteq Q$. Meqë Q nga ana tjetër është minimal, atëherë $M = Q = S - Y$ që nga $Y = S - Q$.
Anasjelltas, supozojmë që $S - Q$ është një p-sistem maksimal i tillë që $(S - Q) \cap I = \emptyset$. Le të jetë M një ideal semiprim maksimal që përmban I dhe i tillë që $(S - Q) \cap M = \emptyset$. Atëherë $I \subseteq M \subseteq P$ dhe $S - Q \subseteq S - M \subseteq S - I$. Që këtej $(S - M) \cap I \subseteq (S - I) \cap I = \emptyset$ dhe $(S - M) \cap I = \emptyset$. Nga cilësia e maksimalitetit të $S - Q$ kemi që $S - Q = S - M$ që nga $M = Q$. Kështu $Q \supseteq I$ është një ideal semiprim. Ai është gjithashtu një ideal semiprim minimal që përmban I sepse në qoftë se P është një ideal semiprim që përmban I dhe përmbahet në mënyrë të mirëfilltë në Q, atëherë $\emptyset = (S - I) \cap I \supseteq (S - P) \cap I \supseteq (S - Q) \cap I$ gjë që është kontradiksion ! Që nga rrjedh rezultati i dëshiruar.

POHIM 1.65. *Le të jetë* S *një gjysmëgrup ternar dhe* I *një ideal i* S. *Atëherë, prerja e të gjithë idealeve semiprimë që përmbajnë* I *është ideal semiprim që përmban* I, *madje është minimal.*

VËRTETIM. Le të jetë $(T_i)_{i\in I}$ një bashkësi çfarëdo idealesh semiprimë që përmbajnë një ideal I të S.Të tregojmë që $\bigcap_{i\in I} T_i$ është ideal semiprim që përmban I. Le të jetë $JJJ \subseteq \bigcap_{i\in I} T_i$ ku J është një ideal i S. Kjo do të thotë që $JJJ \subseteq T_i$ për çdo $i \in I$ dhe meqë T_i është semiprim kemi që $J \subseteq T_i$ për çdo $i \in I$. Kështu $J \subseteq \bigcap_{i\in I} T_i$. Meqë $I \subseteq T_i$ për çdo $i \in I$ është e qartë që $I \subseteq \bigcap_{i\in I} T_i$. Të tregojmë tani që $\bigcap_{i\in I} T_i$ është minimal. Le të jetë T një ideal semiprim që përmban I. Atëherë $T = T_{i_0}$ për ndonjë $i_0 \in I$. Kështu $\bigcap_{i\in I} T_i \subseteq T$ gjë që tregon që $\bigcap_{i\in I} T_i$ është ideal semiprim minimal që përmban I.

POHIM 1.66. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Atëherë, ekziston një p-sistem maksimal që nuk pret ndonjë ideal I të S.*

VËRTETIM. Le të jetë $(T_i)_{i\in I}$ një bashkësi çfarëdo idealesh semiprimë që përmbajnë idealin I të gjysmëgrupit ternar S. Nga Pohimi 1.65 kemi që $\bigcap_{i\in I} T_i$ është ideal semiprim minimal që përmban idealin I. Nga Teorema 1.64 kemi që $S - \bigcap_{i\in I} T_i$ është një p-sistem maksimal i tillë që $(S - \bigcap_{i\in I} T_i) \cap I = \emptyset$ dhe meqë $\bigcap_{i\in I} T_i$ është e vetme kemi që $S - \bigcap_{i\in I} T_i$ është i vetëm.

Në sajë të vetisë së shoqërimit në një gjysmëgrup ternar kemi:

$x_1x_2 \dots x_{2n+1} = (\dots((x_1x_2x_3)x_4x_5)\dots)x_{2n}x_{2n+1}$ për çdo numër tek elementësh $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$në një gjysmëgrup ternar. Në mënyrë induktive përcaktojmë$x^{(0)} = x, x^{(n+1)} = x^{(n)}xx$ për çdo numër të plotë n. Gjithashtu $xxx \dots x$ (m-herë) e shkruajmë si x^m.

TEOREMË 1.67. *Në një gjysmëgrup ternar S pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

(i) *D është ideal plotësisht semiprim i S*

(ii) *Për çdo çift numrash të plotë jo-negativë* m *dhe* n *me shumë numër çift* $S^m(xxx)S^n \subseteq D$, *sjell që* $x \in D$

(iii) *Për çdo* $x \in S - D, xxx \in S - D$

VËRTETIM. (i) sjell (ii) Le të kemi $S^m(xxx)S^n \subseteq D$. Atëherë $(xxx)(xxx) \dots (xxx)$ $(m + n + 1$ herë) i përket D. Nga kushti dhe induksioni kemi që $xxx \in D$ që nga $x \in D$.

(ii) sjell (i) Le të jetë $xxx \in D$. Atëherë për çdo dy numra të plotë jo-negativë m dhe n me shumë numër çift kemi $S^m(xxx)S^n \subseteq S^mDS^n \subseteq D$. Kështu $x \in D$.

(i) sjell (iii) Supozojmë që $xxx \notin D$. Kjo do të thotë që $xxx \in D$ dhe nga kushti $x \in D$ gjë që nuk është e mundur. Kështu $xxx \in S - D$.

(iii) sjell (i) Le të kemi $xxx \in D$. Në qoftë se $x \notin D$ atëherë $x \in S - D$ dhe nga kushti rrjedh që $xxx \in S - D$ gjë që është absurde. Kështu $x \in D$ që nga D është ideal plotësisht semiprim.

POHIM 1.68. *Bashkimi i p-sistemeve është p-sistem.*

VËRTETIM. Le të jetë $(X_i)_{i \in I}$ një bashkësi çfarëdo p-sistemesh. Për çdo $a \in S$ kemi që për ndonjë $i_0 \in I$ ekzistojnë $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X_{i_0}$ të tillë që $ax_1ax_2a \in X_{i_0}$ose $ax_1x_2ax_3x_4a \in X_{i_0}$ose $ax_1x_2ax_3ax_4 \in X_{i_0}$ose $x_1ax_2ax_3x_4 \in X_{i_0}$dhe meqë $X_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$ rrjedh rezultati i dëshiruar.

PËRKUFIZIM 1.69. *Një nënbashkësi joboshe L $[R, M]$ e gjysmëgrupit ternar S quhet pothuajse ideal i majtë [i djathtë, lateral] i S në qoftë se $abL \cap L \neq \emptyset$ $[Rab \cap R \neq \emptyset, aMb \cap M \neq \emptyset]$ për çdo $a, b \in S$.*

PËRKUFIZIM 1.70. *Një nënbashkësi joboshe L [R,M,I] e gjysmëgrupit ternar S quhet pothuajse ideal i majtë [i djathtë, lateral,ideal] i S në qoftë se $abL \cap L \neq \emptyset[Rab \cap R \neq \emptyset, aMb \cap M \neq \emptyset, abI \cap I \neq \emptyset, Icd \cap I \neq \emptyset, eIf \cap I \neq \emptyset]$ për çdo $a, b, c, d, e, f \in S$.*

TEOREMË 1.71. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar.*

(1) *Çdo ideal i majtë i S është pothuajse ideal i majtë i S*

(2) *Çdo ideal i djathtë i S është pothuajse ideal i djathtë i S*

(3) *Çdo ideal lateral i S është pothuajse ideal lateral i S*

(4) *Çdo ideal i S është pothuajse ideal i S*

VËRTETIM. (1) Supozojmë që L është një ideal i majtë i S. Le të jetë $a, b \in S$. Atëherë $abL \subseteq L$ prandaj $abL \cap L \neq \emptyset$.

(2) I ngjashëm me (1)

(3) I ngashëm me (1) dhe (2)

(4) Rrjedh nga (1), (2) dhe (3).

E anasjellta e teoremës në përgjithësi nuk është e vërtetë siç e tregon kundërshembulli:

SHEMBULL 1.72. Le të jetë Z_5 gjysmëgrupi i mbledhjes së numrave të plotë sipas modulit 5. Përcaktojmë veprimin ternar * sipas barazimit $\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Atëherë Z_5 në lidhje me veprimin ternar * formon gjysmëgrup ternar. Është e qartë që bashkësia $L = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}\}$ është pothuajse ideal i majtë i Z_5 e megjithatë L nuk është ideal i majtë i Z_5.

TEOREMË 1.73. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar.*

(1) *Le të jetë L pothuajse ideal i majtë i S. Në qoftë se H është një nëbashkësi e S që përmban L, atëherë H është pothuajse ideal i majtë i S*

(2) *Le të jetë R pothuajse ideal i djathtë i S. Në qoftë se H është një nëbashkësi e S që përmban R, atëherë H është pothuajse ideal i djathtë i S*

(3) *Le të jetë M pothuajse ideal lateral i S. Në qoftë se H është një nëbashkësi e S që përmban M, atëherë H është pothuajse ideal lateral i S*

(4) *Le të jetë I pothuajse ideal i S. Në qoftë se H është një nëbashkësi e S që përmban I, atëherë H është pothuajse ideal i S*

VËRTETIM. (1) Supozojmë që $L \subseteq H$. Le të jenë $a, b \in S$. Nga supozimi $abL \subseteq abH$ që nga $abL \cap L \subseteq abH \cap H$. Meqenëse $abL \cap L \neq \emptyset$, H është pothuajse ideal i majtë i S.

(2) I ngjashëm me (1)

(3) I ngashëm me (1) dhe (2)

(4) Rrjedh nga (1), (2) dhe (3).

TEOREMË 1.74. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar.*

(1) *Në qoftë se L_1 dhe L_2 janë pothuajse ideale të majtë të S, atëherë $L_1 \cup L_2$ është pothuasje ideal i majtë i S.*

(2) *Në qoftë se R_1 dhe R_2 janë pothuajse ideale të djathtë të S, atëherë $R_1 \cup R_2$ është pothuasje ideal i djathtë i S.*

(3) *Në qoftë se M_1 dhe M_2 janë pothuajse ideale lateralë të S, atëherë $M_1 \cup M_2$ është pothuasje ideal lateral i S.*

(4) *Në qoftë se I_1 dhe I_2 janë pothuajse ideale të S, atëherë $I_1 \cup I_2$ është pothuasje ideal i S.*

VËRTETIM. (1) Meqenëse $L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$ kemi që $abL_1 \subseteq ab(L_1 \cup L_2)$ ku $a, b \in S$. Kështu $\emptyset \neq abL_1 \cap L_1 \subseteq ab(L_1 \cup L_2) \cap (L_1 \cup L_2)$. Kjo tregon që $L_1 \cup L_2$ është pothuajse ideal i majtë i S.

(2) I ngjashëm me (1)

(3) I ngashëm me (1) dhe (2)

(4) Rrjedh nga (1), (2) dhe (3).

SHEMBULL 1.75. Konsiderojmë gjysmëgrupin ternar Z_5 në lidhje me operacionin ternar * të përcaktuar $\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Bashkësitë $I_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dhe $I_2 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$ janë pothuasje ideale të Z_5 e megjithatë $I_1 \cap I_2 = \{\bar{1}, \bar{4}\}$ nuk është ideal i Z_5. Kjo do të thotë që prerja e dy idealeve të nje gjysmëgrupi ternar S mund të mos jetë ideal i S.

VËREJTJE 1.76. Në qoftë se prerja e dy ose më shumë nëngjysmëgrupeve ternare (nënbashkësive) të gjysmëgrupit ternar S është pothuajse ideal i majtë [i djathtë, lateral,ideal] i S atëherë nëngjysmëgrupet ternare (nënbashkësitë) janë pothuajse ideale të majtë [të djathtë, lateralë ,ideale] të S.

POHIM 1.77. *Prodhimi i tre ose më shumë pothuajse idealeve të majtë [të djathtë, lateralë, idealeve] të një gjysmëgrupi ternar S në përgjithësi nuk është pothuajse ideal i majtë [i djathtë, lateral, ideal] i S.*

VËRTETIM. Do të vërtetojmë pohimin në rastin e tre objekteve, shtrirja e më shumë se tre rrjedh nga induksioni. Le të jenë A, B dhe C tre pothuajse ideale të majtë [të djathtë, lateralë, ideale] të S. Atëherë $ABC \subseteq A \cap B \cap C$ por $A \cap B \cap C$ nuk është pothuajse ideal i majtë [i djathtë, lateral, ideal] i S kështu ABC duke qenë nënbashkësi e $A \cap B \cap C$ nuk është pothuajse ideal i majtë [i djathtë, lateral, ideal] i S.

TEOREMË 1.78. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar dhe* $|S| > 1$.

(1) *S nuk ka pothuajse ideale të majtë të mirëfilltë vetëm atëherë kur për çdo $a \in S$ ekzistojnë elementët $s_a, k_a \in S$ të tillë që $s_a k_a (S \setminus \{a\}) = \{a\}$.*

(2) *S nuk ka pothuajse ideale të djathtë të mirëfilltë vetëm atëherë kur për çdo $a \in S$ ekzistojnë elementët $s_a, k_a \in S$ të tillë që $(S \setminus \{a\}) s_a k_a = \{a\}$.*

(3) *S nuk ka pothuajse ideale lateralë të mirëfilltë vetëm atëherë kur për çdo $a \in S$ ekzistojnë elementët $s_a, k_a \in S$ të tillë që $s_a (S \setminus \{a\}) k_a = \{a\}$.*

(4) *S nuk ka pothuajse ideale të mirëfilltë vetëm atëherë kur për çdo $a \in S$ ekzistojnë elementët $s_a, k_a, h_a, m_a, t_a, r_a \in S$ të tillë që $s_a k_a(S\backslash\{a\}) = \{a\}$, $(S\backslash\{a\})h_a m_a = \{a\}$ dhe $t_a(S\backslash\{a\})r_a = \{a\}$.*

VËRTETIM. (1) Supozojmë që S nuk ka pothuajse ideale të majtë të mirëfilltë. Atëherë $H\backslash\{a\}$ nuk është pothuajse ideal i majtë. Atëherë, ekzistojnë $s_a, k_a \in S$ të tillë që $s_a k_a(S\backslash\{a\}) \cap (S\backslash\{a\}) = \emptyset$ prandaj$s_a k_a(S\backslash\{a\}) = \{a\}$.
Anasjelltas, supozojmë që për çdo $a \in S$ ekzistojnë $s_a, k_a \in S$ të tillë që $s_a k_a(S\backslash\{a\}) = \{a\}$. Le të jetë $a \in S$. Atëherë $s_a k_a(S\backslash\{a\}) \cap (S\backslash\{a\}) = \emptyset$. Kështu $S\backslash\{a\}$ nuk është pothuajse ideal i mjatë i S. Le të jetë H një pothuajse ideal i majtë i mirëfilltë i S. Atëherë $H \subseteq S\backslash\{a\}$ për ndonjë $a \in S$ gjë që përbën një kontradiksion prandaj S nuk ka pothuajse ideale të majtë të mirëfilltë.
(2) I ngjashëm me (1)
(3) I ngjashëm me (1) dhe (2)
(4) Rrjedh nga (1), (2) dhe (3).

PËRKUFIZIM 1.79. *Një nëngjysmëgrup ternar I i gjysmëgrupit ternar S quhet ideal i brendshëm i S në qoftë se $SISIS \subseteq I$.*

PËRKUFIZIM 1.80. *Një nënbashkësi joboshe I e gjysmëgrupit ternar S quhet pothuajse ideal i brendshëm në qoftë se $aIbIc \cap I \neq \emptyset$ për çdo $a, b, c \in S$.*

Teorema që vijon rrjedh direkt nga përkufizimi i idealit të brendshëm dhe pothuajse idealit të brendshëm.

TEOREMË 1.81. *Çdo ideal i brendshëm i gjysmëgrupit ternar S është pothuajse ideal i brendshëm i S.*

VËRTETIM. Le të jetë I një ideal i brendshëm i gjysmëgrupit ternar S. Nga përkufizimi, $aIbIc \subseteq I$ për çdo $a, b, c \in S$. Kjo tregon që $aIbIc \cap I \neq \emptyset$ për çdo $a, b, c \in S$ prandaj I është pothuajse ideal i brendshëm i S.

Në përgjithësi, e anasjellta e Teoremës 1.81 nuk është e vërtetë siç e tregon shembulli më poshtë.

SHEMBULL 1.82. Le të jetë Z_9 gjysmëgrupi i mbledhjes së numrave të plotë sipas modulit 9. Përcaktojmë veprimin ternar * sipas barazimit $\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Atëherë Z_9 në lidhje me veprimin ternar * formon gjysmëgrup ternar. Bashkësia $I = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$ është pothuajse ideal i brendshëm i Z_9 por nuk është ideal i brendshëm i Z_9.

TEOREMË 1.83. *Le të jetë I pothuajse ideal i brendshëm i gjysmëgrupit ternar S. Atëherë çdo nënbashkësi H e S që përmban I është pothuajse ideal i brendshëm i S.*

VËRTETIM. Meqenëse $I \subseteq H, aIbIc \cap I \subseteq aHbHc \cap H$ për çdo $a, b, c \in S$. Kjo tregon që $aHbHc \cap H \neq \emptyset$ për çdo $a, b, c \in S$.

Rrjedhimi që vijon rrjedh direkt nga Teorema 1.83.

RRJEDHIM 1.84. *Në qoftë se I_1 dhe I_2 janë pothuajse ideale të brendshëm të gjysmëgrupit ternar S, atëherë $I_1 \cup I_2$ është pothuajse ideal i brendshëm i S.*

Vëmë re që në qoftë se I_1 dhe I_2 janë pothuajse ideale të brendshëm të S, atëherë $I_1 \cap I_2$ mund të mos jetë pothuajse ideal i brendshëm i S.

SHEMBULL 1.85. Le të jetë Z_9 gjysmëgrupi i mbledhjes së numrave të plotë sipas modulit 9. Përcaktojmë veprimin ternar * sipas barazimit $\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Atëherë Z_9 në lidhje me veprimin ternar * formon gjysmëgrup ternar. Bashkësia $I_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$ dhe $I_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}\}$ janë pothujase ideale të brendshëm të Z_9 ndërsa $I_1 \cap I_2 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{5}\}$ nuk është pothuajse ideal i brendshëm i Z_9.

VËREJTJE 1.86. Në qoftë se prerja e dy ose më shumë nëngjysmëgrupeve ternare (nënbashkësive) të gjysmëgrupit ternar S është pothuajse ideal i brendshëm i S atëherë nëngjysmëgrupet ternare (nënbashkësitë) janë pothuajse ideale të brendshëm të S.

POHIM 1.87. *Prodhimi i tre ose më shumë pothuajse idealeve të brendshëm të një gjysmëgrupi ternar S në përgjithësi nuk është pothuajse ideal i brendshëm i S.*

VËRTETIM. Do të vërtetojmë pohimin në rastin e tre objekteve, shtrirja e më shumë se tre rrjedh nga induksioni. Le të jenë A, B dhe C tre pothuajse ideale të brendshëm të S. Atëherë $ABC \subseteq A \cap$

$B \cap C$ por $A \cap B \cap C$ nuk është pothuajse ideal i brendshëm i S kështu ABC duke qenë nënbashkësi e $A \cap B \cap C$ nuk është pothuajse ideal i brendshëm i S.

Më tej ne do të studiojmë nocionin e pothuajse idealit dobësisht të brendshëm në gjysmëgrupet ternare.

PËRKUFIZIM 1.88. *Një nënbashkësi joboshe I e gjysmëgrupit ternar S quhet pothuajse ideal dobësisht i brendshëm i S në qoftë se $aIaIa \cap I \neq \emptyset$, për çdo $a \in S$.*

Teorema e mëposhtme rrjedh direkt nga përkufizimi i pothuajse idealit të brendshëm dhe pothuajse idealit dobësisht të brendshëm.

TEOREMË 1.89. *Çdo pothuajse ideal i brendshëm i gjysmëgrupit ternar S është pothuajse ideal dobësisht i brendshëm i S.*

Në përgjithësi, e anasjellta e Teoremës 1.89 nuk është e vërtetë siç mund të shohim në kundërshembullin më poshtë.

SHEMBULL 1.90.. Le të jetë Z_8 gjysmëgrupi i mbledhjes së numrave të plotë sipas modulit 8. Përcaktojmë veprimin ternar * sipas barazimit $\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Atëherë Z_8 në lidhje me veprimin ternar * formon gjysmëgrup ternar. Bashkësia $I = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ është pothuajse ideal dobësisht i brendshëm i Z_8 por nuk është pothuajse ideal i brendshëm i Z_8.

TEOREMË 1.91. *Le të jetë I pothuajse ideal dobësisht i brendshëm i gjysmëgrupit ternar S. Atëherë çdo nënbashkësi H e S që përmban I është gjithashtu pothuajse ideal dobësisht i brendshëm i S.*

VËRTETIM. Meqenëse $I \subseteq H, aIaIa \cap I \subseteq aHaHa \cap H$ për çdo $a \in S$. Kjo tregon që $aHaHa \cap H \neq \emptyset$ për çdo $a \in S$.

Rrjedhimi që vijon rrjedh direkt nga Teorema 1.91.

RRJEDHIM 1.92. *Në qoftë se I_1 dhe I_2 janë pothuajse ideale dobësisht të brendshëm të gjysmëgrupit ternar S, atëherë $I_1 \cup I_2$ është gjithashtu pothuajse ideal dobësisht i brendshëm i S.*

Supozojmë që I_1 dhe I_2 janë pothuajse ideale dobësisht të brendshëm të gjysmëgrupit ternar S. Kundërshembulli më poshtë tregon që $I_1 \cap I_2$ mund të mos jetë pothuajse ideal dobësisht i brendshëm i S.

SHEMBULL 1.93. Le të jetë Z_8 gjysmëgrupi i mbledhjes së numrave të plotë sipas modulit 8. Përcaktojmë veprimin ternar * sipas barazimit $\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Atëherë Z_8 në lidhje me veprimin ternar * formon gjysmëgrup ternar. Bashkësitë $I_1 = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ dhe $I_2 = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ janë pothuajse ideale dobësisht të brendshëm të Z_8 por $I_1 \cap I_2 = \{\bar{0}\}$ nuk është pothuajse ideal dobësisht i brendshëm i Z_8.

TEOREMË 1.94. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar i tillë që* $|S| > 1$. *Atëherë S nuk ka pothuajse ideale dobësisht të brendshëm të mirëfilltë vetëm atëherë kur për çdo* $a \in S$ *ekziston një element* $s_a \in S$ *i tillë që* $s_a(S\backslash\{a\})s_a(S\backslash\{a\})s_a = \{a\}$.

VËRTETIM. Supozojmë që S nuk ka pothuajse ideale dobësisht të brendshëm dhe le të jetë $a \in S$. Atëherë $S\backslash\{a\}$ nuk është pothuajse ideal dobësisht i brendshëm i S. Atëherë ekziston $s_a \in S$ i tillë që $s_a(S\backslash\{a\})s_a(S\backslash\{a\})s_a \cap (S\backslash\{a\}) = \emptyset$ prandaj $s_a(S\backslash\{a\})s_a(S\backslash\{a\})s_a = \{a\}$. Anasjelltas, supozojmë që S një pothuajse ideal dobësisht të brendshëm të themi I. Le të jetë $a \notin I$. Atëherë $S\backslash\{a\}$ përmban I. Nga Teorema 2.5, $S\backslash\{a\}$është pothuajse ideal dobësisht i brendshëm i S. Atëherë për çdo $b \in S$, $b(S\backslash\{a\})b(S\backslash\{a\})b \cap (S\backslash\{a\}) \neq \emptyset$. Nga supozimi, ekziston një element $s_a \in S$ i tillë që $s_a(S\backslash\{a\})s_a(S\backslash\{a\})s_a = \{a\}$. Kështu $s_a(S\backslash\{a\})s_a(S\backslash\{a\})s_a \cap (S\backslash\{a\}) = \{a\} \cap (S\backslash\{a\}) = \emptyset$ gjë që është një kontradiksion. Kështu, S nuk ka pothuajse ideale dobësisht të brendshëm të mirëfilltë.

1.3 RELACIONET E GRINIT NË GJYSMËGRUPET TERNARE

[3] Ne do ta fillojmë këtë seksion me disa koncepte të përgjithshme të rëndësishme. Le të jetë X një bashkësi jo-boshe dhe XxX bashkësia e të gjithë çifteve të radhitur (x, y) të elementëve $x, y \in X$. Me *relacion binar* në bashkësinë X do të kuptojmë një nënbashkësi ρ të bashkësisë XxX.

Në qoftë se $(x, y) \in \rho$ ku x, y janë elementë të X, ne do të shkruajmë gjithashtu $x\rho y$. Ne do të shënojmë ι *relacionin e barazisë* të përcaktuar nga $(a, b) \in \iota$ vetëm atëherë kur $a = b$. Gjithashtu ω do të shënojmë *relacionin universal* të përcaktuar nga $(a, b) \in \omega$ për të gjitha $a, b \in X$ që do të thotë $\omega = XxX$. *Relacioni bosh* □ në X është nënbashkësia boshe e XxX.

PËRKUFIZIM 1.95. [3] *Një relacion ρ në bashkësinë X quhet:*

(i) *reflektiv në qoftë se $x\rho x$ për çdo $x \in X$*

(ii) *simetrik në qoftë se $x\rho y$ sjell $y\rho x$ për çdo $x, y \in X$*

(iii) *antisimetrik në qoftë se $x\rho y$ dhe $y\rho x$ sjellin $x = y$ për çdo $x, y \in X$*

(iv) *kalimtar në qoftë se $x\rho y$ dhe $y\rho z$ sjellin $x\rho z$ për çdo $x, y, z \in X$.*

Relacioni $\leq$ në bashkësinë A quhet *relacion renditjeje* në A në qoftë se $\leq$ është relacion reflektiv, antisimetrik dhe kalimtar. Në këtë rast A quhet *bashkësi pjesërisht e renditur.*
Le të jetë S një gjysmëgrup ternar ndërrimtar dhe idempotent si dhe $a, b \in S$. Përcaktojmë $a \leq b$ vetëm atëherë kur $axb = a$ kur $axa = a$ për ndonjë $x \in S$. Supozojmë që $axa = a$ dhe $ax_1a = a$ për ndonjë $x_1 \in S$. Le të jetë $axb = a$. Tani $ax_1b = (axa)x_1b = ax(ax_1b) = ax(bx_1a) = (axb)x_1a = ax_1a = a$. Kështu, relacioni është i mirëpërcaktuar. Meqenëse a është idempotent atëherë kemi $aaa = a$ që tregon që $a \leq a$, për çdo $a \in S$ kështu që relacioni është reflektiv. Le të jetë $a \leq b$ dhe $b \leq a$. Atëherë kemi $axb = a$ ku $axa = a$ dhe $bya = b$ ku $byb = b$. Kështu $a = axb = ax(byb) = (axb)yb = ayb = bya = b$ gjë që tregon që relacioni është antisimetrik. Le të jetë $a \leq b$ dhe $b \leq c$. Atëherë $axb = a$ ku $axa = a$ dhe $byc = b$ ku $byb = b$. Kështu $axc = (axb)xc = (ayb)xc = by(axc) = by(cxa) = (byc)xa = bxa = axb = a$ gjë që tregon që relacioni është kalimtar. Kështu relacioni " $\leq$ " është relacion renditjeje kurse S është *gjysmëgrup ternar i renditur*. Një element a i bashkësisë pjesërisht të renditur A quhet *kufi i sipërm* i nënbashkësisë B të A në qoftë se $b \leq a$ për çdo element b të B. [3] Një kufi i sipërm a^* i B quhet *kufi i përpiktë i sipërm* ose *superior* i B në qoftë se $a^* \leq a$ për çdo kufi të sipërm a të B. Në qoftë se nënbashkësia dy-elementëshe $\{x, y\}$ e bashkësisë pjesërisht të renditur A ka superior i cili shënohet $x \vee y$, atëherë A quhet $\vee$-*semilaticë*. Në mënyrë duale, një element a i bashkësisë pjesërisht të renditur A quhet *kufi i poshtëm* i nënbashkësisë B të A në qoftë se $b \geq a$ për çdo element b të B. Një kufi i poshtëm a^* i B quhet *kufi i përpiktë i poshtëm* ose *inferior* i B në qoftë se $a^* \geq a$ për çdo kufi të poshtëm a të B. Në qoftë se nënbashkësia dy-elementëshe $\{x, y\}$ e bashkësisë pjesërisht të renditur A ka inferior i cili shënohet $x \wedge y$, atëherë A quhet $\wedge$-*semilaticë*.
Me *laticë V* do të kuptojmë një bashkësi pjesërisht të renditur e cila është njëherësh $\vee$-semilaticë

dhe $\wedge$-semilaticë. Një përkufizim ekuivalent i laticës V është ai që vijon. Një bashkësi jo-boshe quhet laticë në qoftë se dy operacionet $\wedge$ (inferiori), $\vee$ (superiori) të përcaktuara në V plotësojnë kushtet:

(1) $a \wedge a = a$ dhe $a \vee a = a$

(2) $a \wedge b = b \wedge a$ dhe $a \vee b = b \vee a$

(3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ dhe $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

(4) $(a \wedge b) \vee a = a$ dhe $(a \vee b) \wedge a = a$

për të gjitha $a, b, c \in V$.

Një laticë quhet *e plotë* në qoftë se çdo nënbashkësi e V ka kufi të përpiktë të sipërm (superior) dhe kufi të përpiktë të poshtëm (inferior) në V. Inferiori (superiori) i të gjithë elementëve të laticës së plotë V quhet elementi më i vogël (elementi më i madh) i V.

POHIM 1.96. *Bashkësia e të gjitha nënbashkësive të një bashkësie të dhënë së bashku me bashkësinë boshe, është laticë e plotë në lidhje më përfshierjen e teorisë së bashkësive.*

VËRTETIM. Le të jetë X një bashkësi dhe B_X bashkësia e të gjitha nënbashkësive të X. Për çdo $A \in B_X$, $A \subseteq A$ që tregon se relacioni i përfshierjes $\subseteq$ është reflektiv. Për çdo $A, B \in B_X$, $A \subseteq B$ dhe $B \subseteq A$ sjell që $A = B$ gjë që tregon që relacioni $\subseteq$ është antisimetrik. Gjithashtu, për çdo $A, B, C \in B_X$, $A \subseteq B$ dhe $B \subseteq C$ sjell që $A \subseteq C$. Kështu, relacioni $\subseteq$ është kalimtar. Atëherë, relacioni $\subseteq$ është renditje e pjesshme ndërsa B_X është një bashkësi pjesërisht e renditur në lidhje me $\subseteq$. Për çdo $A, B \in B_X$, $A, B \subseteq A \cup B$. Kjo do të thotë që $A \cup B$ është një kufi i sipërm i bashkësisë $\{A, B\}$. Le të jetë K një kufi i sipërm i bashkësisë $\{A, B\}$. Nga teoria e bashkësive është e qartë që $A \cup B \subseteq K$. Kjo do të thotë që $K^* = A \cup B$ është kufi i përpiktë i sipërm i bashkësisë $\{A, B\}$ ose që $K^* = A \cup B$ është superiori i $\{A, B\}$. Kështu $A \vee B = A \cup B$. Në këtë mënyrë, bashkësia B_X është $\vee$-semilaticë. Nga ana tjetër, për çdo $A, B \in B_X$ është e qartë që (Teoria e Bashkësive) $A \cap B \subseteq A$ dhe $A \cap B \subseteq B$. Kjo tregon që $A \cap B$ është kufi i poshtëm i bashkësisë $\{A, B\}$. Le të jetë tani K një kufi i poshtëm i $\{A, B\}$. Është e qartë që $K \subseteq A \cap B$ gjë që tregon që $A \cap B$ është kufi i përpiktë i poshtëm i $\{A, B\}$ ose inferiori i kësaj bashkësie. Kështu, $K^* = A \cap B = A \wedge \mathrm{B}$. Kjo tregon që B_X është $\wedge$-semilaticë. Kështu, B_X është një laticë. Në mënyrë të ngjashme, në qoftë se $D_X = \{A: A \subseteq X\}$ është një nënbashkësi e B_X,atëherë është e qartë që $\bigcup_{A \in D_X} A$ është superiori i D_X dhe $\bigcap_{A \in D_X} A$ është inferiori i D_X. Kështu D_X është laticë e plotë.

Le të jenë ρ, σ dy relacione (binare) në bashkësinë X. Përfshierja $\rho \subseteq \sigma$ do të thotë që ρ është nënbashkësi e σ. Kjo është ekuivalente me implikimin: $a\rho b$ sjell $a\sigma b$ $(a, b \in X)$. Meqënëse bashkësia $\mathcal{B}_X$ e të gjithë relacioneve (binare) në X përmban të gjitha nënbashkësitë e bashkësisë XxX së bashku me bashkësinë boshe, kemi që $\mathcal{B}_X$ formon laticë të plotë në lidhje me përfshierjen $\subseteq$. Operacionet në këtë laticë do të shënohen $\cap$ (prerja) dhe $\cup$ (bashkimi). Relacioni universal ω dhe relacioni bosh □ janë përkatësisht elementi më i madh dhe elementi më i vogël i $\mathcal{B}_X$.

Relacioni ζ në bashkësinë X quhet *relacion ekuivalence* në X në qoftë se ai është reflektiv, simetrik dhe kalimtar. Është e qartë që çdo relacion ekuivalence ζ në bashkësinë X përcakton një *copëtim* në X *klasa ekuivalence* (jo-prerëse) mod ζ dhe anasjelltas, çdo copëtim i X përcakton një relacion të vetëm ekuivalence në X.

POHIM 1.97. *Prerja e një bashkësie çfarëdo relacionesh ekuivalence në bashkësinë X është relacion ekuivalence në* X.

VËRTETIM. Le të jetë $(\rho_i)_{i\in I}$ një bashkësi çfarëdo relacionesh ekuivalence në bashkësinë X. Për çdo $x \in X, x\rho_i x$ për çdo $i \in I$. Kështu $x \bigcap_{i\in I} \rho_i x$ që nga $\bigcap_{i\in I} \rho_i$ është reflektiv. Gjithashtu, për çdo $x, y \in X, x\rho_i y$ sjell që $y\rho_i x$ për çdo $i \in I$. Kjo do të thotë që $x \bigcap_{i\in I} \rho_i y$ sjell që $y \bigcap_{i\in I} \rho_i x$. Kështu $\bigcap_{i\in I} \rho_i$ është simetrik.Nga ana tjetër $x\rho_i y$ dhe $, x\rho_i z$ sjell $, x\rho_i z$. Kështu $x \bigcap_{i\in I} \rho_i y$ dhe $x \bigcap_{i\in I} \rho_i z$ sjell $x \bigcap_{i\in I} \rho_i z$.

Bashkimi $\zeta \cup \mu$ i dy relacioneve ekuivalence ζ dhe μ në X në përgjithësi nuk është relacion ekuivalence në X. Superiori $\zeta \vee \mu$ i ζ dhe μ është relacioni i ekuivalencës më i vogël në X që përmban ζ dhe μ. Meqënëse relacioni universal ω është një relacion ekuivalence që përmban ζ dhe μ kemi që $\zeta \vee \mu$ ekziston dhe është prerja e të gjithë relacioneve të ekuivalencës që përmbajnë ζ dhe μ.

PËRKUFIZIM 1.98. [2] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar. Një relacion ekuivalence* γ *në* S *quhet:*

(i) *kongruencë e djathtë në qoftë se* $a\gamma b$ *sjell* $acd\gamma bcd$ *për çdo* $a, b, c, d \in S$

(ii) *kongruencë e majtë në qoftë se* $a\gamma b$ *sjell* $cda\gamma cdb$ *për çdo* $a, b, c, d \in S$

(ii) *kongruencë laterale në qoftë se* $a\gamma b$ *sjell* $cad\gamma cbd$ *për çdo* $a, b, c, d \in S$

(iii) *kongruencë në qoftë se* γ *është njëherësh kongruencë e djathtë dhe e majtë në* S.

Dy elementë a, b të gjysmëgrupit ternar S quhen *$\mathscr{L}$-ekuivalentë* në qoftë se ata gjenerojnë të njëjtin ideal kryesor të majtë të S. Me fjalë të tjera, $\mathscr{L}$ është nënbashkësi e SxS që konsiston në të gjithë çiftet e radhitur (a, b) të tillë që $(a)_l = a \cup SSa = b \cup SSb = (b)_l$. Kjo do të thotë që $a\mathscr{L}b$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se ekzistojnë elementët s_1, t_1, s_2, t_2 në S të tillë që $a = s_1s_2b$ dhe $b = t_1t_2a$. Është e qartë që $\mathscr{L}$ është një relacion ekuivalence në S i tillë që $a\mathscr{L}b$ sjell $acd\mathscr{L}bcd$ për çdo c, d të S, domethënë $\mathscr{L}$ është kongruencë e djathtë në S. Le të jetë L_a bashkësia e të gjithë elementëve të S të cilët janë $\mathscr{L}$-ekuivalentë me a në S, domethënë L_a është klasa e ekuivalencës mod$\mathscr{L}$ që përmban elementin a. Dy elementë a, b të gjysmëgrupit ternar S quhen *$\mathscr{M}$-ekuivalentë* në qoftë se ata gjenerojnë të njëjtin ideal kryesor lateral të S. Me fjalë të tjera, $\mathscr{M}$ është nënbashkësi e SxS që konsiston në të gjithë çiftet e radhitur (a, b) të tillë që $(a)_t = a \cup SaS \cup SSaSS = b \cup SbS \cup SSbSS = (b)_t$. Kjo do të thotë që $a\mathscr{M}b$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se ekzistojnë elementët s_1, t_1, s_2, t_2 në S të tillë që $a = s_1bs_2$ dhe $b = t_1at_2$ ose $a = s_1s_2bs_3s_4$ dhe $b = t_1t_2at_3t_4$ për s_1, s_2, s_3, s_4 dhe t_1, t_2, t_3, t_4 në S.. Është e qartë që $\mathscr{M}$ është një relacion ekuivalence në S i tillë që $a\mathscr{M}b$ sjell $cad\mathscr{M}cbd$ për çdo c, d të S, domethënë $\mathscr{M}$ është kongruencë laterale në S Le të jetë M_a bashkësia e të gjithë elementëve të S të cilët janë $\mathscr{M}$-ekuivalentë me a në S, domethënë M_a është klasa e ekuivalencës mod$\mathscr{M}$ që përmban elementin a. Dy elementë a, b të gjysmëgrupit ternar S quhen *$\mathscr{R}$-ekuivalentë* në qoftë se ata gjenerojnë të njëjtin ideal kryesor të djathtë të S. Me fjalë të tjera,$\mathscr{R}$ është nënbashkësi e SxS që konsiston në të gjithë çiftet e radhitur (a, b) të tillë që $(a)_r = a \cup aSS = b \cup bSS = (b)_r$. Kjo do të thotë që $a\mathscr{R}b$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se ekzistojnë elementët s_1, t_1, s_2, t_2 në S të tillë që $a = bs_1s_2$ dhe $b = at_1t_2$. Është e qartë që $\mathscr{R}$ është një relacion ekuivalence në S i tillë që $a\mathscr{R}b$ sjell $acd\mathscr{R}bcd$ për çdo c, d të S, domethënë $\mathscr{R}$ është kongruencë e djathtë në S Le të jetë R_a bashkësia e të gjithë elementëve të S të cilët janë $\mathscr{R}$-ekuivalentë me a në S, domethënë R_a është klasa e ekuivalencës mod$\mathscr{R}$ që përmban elementin a.

Prerja $\mathscr{L} \cap \mathscr{R} = \mathscr{H}$ e relacioneve të ekuivalencës $\mathscr{L}$dhe $\mathscr{R}$ në gjysmëgrupin ternar S është relacion ekuivalence në S. Ne do ta shënojmë klasën e ekuivalencës mod$\mathscr{H}$ që përmban a në S me H_a. Është evidente që $H_a = L_a \cap R_a \quad (a \in S)$.

LEMË 1.99. *Në qoftë se elementët* a, as_1s_2 $[s_1s_2a]$ *të gjysmëgrupit ternar* S $(s_1, s_2 \in S)$ *i përkasin të njëjtës* $\mathscr{H}$*-klasë* H *të* S*, atëherë* $Hs_1s_2 = H$ $[s_1s_2H = H]$.

VËRTETIM. Le të jetë h një element i $\mathscr{H}$-klasës H. Meqenëse $h \cup SSh = a \cup SSa = as_1s_2 \cup SSas_1s_2$ dhe $hs_1s_2 \cup SShs_1s_2 = as_1s_2 \cup SSas_1s_2$ ne kemi që $h \cup SSh = hs_1s_2 \cup SShs_1s_2$. Nga ana tjetër $h \cup SSh = a \cup SSa$ sjell që $h = xya$ për $x, y \in S$. Meqënëse $a \cup aSS = as_1s_2 \cup as_1s_2SS$ ne kemi që $xya \cup xyaSS = xyas_1s_2SS$ që do të thotë që $h \cup hSS = hs_1s_2SS$. Kështu $Hs_1s_2 \subseteq H$. Meqenëse $h \cup hSS = hs_1s_2SS$ ekzistojnë elementët t_1, t_2 në S të tillë që $hs_1s_2t_1t_2 = h$. Elementët hs_1s_2 dhe $hs_1s_2t_1t_2$ i përkasin H; nga pjesa e parë e vërtetimit ne kemi që $Ht_1t_2 \in H$. Së fundmi $h \cup SSh = hs_1s_2 \cup SShs_1s_2$ sjell ekzistencën e x, y në S të tillë që $h = xyhs_1s_2$. Kështu ne kemi $h = xyhs_1s_2 = xyhs_1s_2t_1t_2s_1s_2 = ht_1t_2s_1s_2 = ht_1t_2s_1s_2$ prandaj $H \subseteq Ht_1t_2s_1s_2 \subseteq Hs_1s_2$. Në mënyrë të ngjashme tregohet që $s_1s_2H = H$.

TEOREMË 1.100. *Në qoftë se* $a, b \in S$ *atëherë* $asb \in R_a \cap L_b$ *sjell* $asH_b = H_asb = xsH_b = H_asy = H_asH_b = H_{asb} = R_a \cap L_b$ *ku* $s \in S, x \in H_a$ *dhe* $y \in H_b$.

VËRTETIM. Le të jetë h një element çfarëdo i $\mathscr{H}$-klasës H_a. Atëherë $asb \in R_a \cap L_b$ dhe $h \cup SSh = a \cup SSa$ sjellin $hsb\mathscr{L}asb\mathscr{L}$b. Nga ana tjetër $h\mathscr{L}a$ sjell që $h = s_1s_2a$ për $s_1, s_2 \in S$. Gjithashtu $a\mathscr{R}asb$ sjell që $s_1s_2a\mathscr{R}\, s_1s_2(asb) = (s_1s_2a\,)sb = hsb$. Kështu $hsb \in R_a \cap L_b$ gjë që sjell $H_asb \subseteq R_a \cap L_b$. Në mënyrë të ngjashme tregohet që $asH_b \subseteq R_a \cap L_b$. Të tregojmë tani që $H_{asb} = R_a \cap L_b$. Le të jetë $c \in R_a \cap L_b$. Atëherë $c\mathscr{L}\,b\mathscr{L}\,asb$ dhe $c\mathscr{R}\,a\mathscr{R}\,asb$. Kështu $c \in H_{asb}$ gjë që tregon që $R_a \cap L_b \subseteq H_{asb}$.

Anasjelltas, në qoftë se $d \in H_{asb}$ atëherë $d\mathscr{L}\,asb\mathscr{L}\,b$ dhe $d\mathscr{R}\,asb\mathscr{R}\,a$ që nga $H_{asb} \subseteq R_a \cap L_b$. Në qoftë se $x \in H_a$ dhe $y \in H_b$ atëherë $x\mathscr{L}a$ dhe $y\mathscr{R}\,b$ sjellin që $xsy\mathscr{L}asy$ dhe $xsy\mathscr{R}\,xsb$. Meqenëse $y \in H_b, asH_b \subseteq L_b, x \in H_a$ dhe $H_asb \subseteq R_a$ kemi që $xsy\mathscr{L}\,asy\mathscr{L}\,b$ dhe $xsy\mathscr{R}\,xsb\mathscr{R}\,a$. Kështu $xsy \in R_a \cap L_b$ që nga $H_asH_b \subseteq R_a \cap L_b$.Të tregojmë që $H_{asb} \subseteq H_asb$ dhe $H_{asb} \subseteq asH_b$. Meqenëse $H_{asb} = R_a \cap L_b$ kemi që $asb \in R_a$ që nga ekzistojnë $m, k \in S$ të tillë që $a = (asb)km$ që nga $asb = [(asb)km]sb$. Le të jetë n një element çfarëdo i H_{asb}. Atëherë $H_{asb} = R_{asb} \cap L_{asb}$ sjell që $n\mathscr{L}\,asb$ që nga $nkm\mathscr{L}\,(asb)km$. Kështu $nkm\mathscr{L}\,a$ që do të thotë që $nkm \in L_a$. Meqenëse $n\mathscr{L}\,asb$ ekzistojnë $p, q \in S$ të tillë që $n = pq(asb)$. Shënojmë $r = nkm$. Atëherë $rsb = (nkm)sb = \Big(\big(pq(asb)\big)km\Big)sb = pq\big((asn)km\big)sb = (pqa)sb = pq(asn) = n$. Barazimet

$r = nkm$ dhe $n = rsb$ sjellin që $r\mathscr{R}n$. Meqenëse $n \in H_{asb} = R_a \cap L_b$ kemi që $n\mathscr{R}a$. Atëherë $r\mathscr{R}a$. Kështu $r = nkm \in R_a$. Nga $nkm \in L_a$ dhe $nkm \in R_a$ rrjedh që $nkm \in R_a \cap L_a = H_a$. Kështu $n = rsb = (nkm)sb \in H_a sb$ që nga $H_{asb} \subseteq H_a sb$. Në mënyrë të ngjashme tregohet që $H_{asb} \subseteq asH_b$. Kështu, nga $H_a sb \subseteq H_a sH_b \subseteq R_a \cap L_b = H_{asb} \subseteq H_a sb$ dhe $asH_b \subseteq H_a sH_b \subseteq R_a \cap L_b = H_{asb} \subseteq asH_b$ rrjedh që $asH_b = H_a sb = H_{asb} = H_a sH_b = R_a \cap L_b$. Gjithashtu $xsy \in R_a \cap L_b$ për çdo element $x \in H_a$ dhe $y \in H_b$. Nga $H_a = H_x, R_a = R_x, H_b = H_y$ dhe $L_b = L_y$ rrjedh që $xsy \in R_x \cap L_y$ dhe $x \in H_b = xsH_y = R_x \cap L_y = R_a \cap L_b = H_x sy = H_a sy$.

Tani le të kthehemi tek teoria e përgjithshme e relacioneve binare në bashkësinë X. Në qoftë se $\rho \; dhe \; \sigma$ janë relacione (binare) në X, atëherë kompozimi $\rho \; o \; \sigma$ i ρ dhe σ përcaktohet si vijon: $a\rho \; o \; \sigma b \; (a, b \in X)$ në qoftë se ekziston një element x në X i tillë që $a\rho x$ dhe $x\sigma b$. Është e qartë që $\iota \; o \; \rho = \rho \; o \; \iota = \rho$ dhe $\square \; o \; \rho = \rho \; o \; \square = \square$. Në qoftë se ζ është një relacion ekuivalence në X, atëherë $\zeta o \; \zeta = \zeta$. Tregohet lehtë që: $\rho \subseteq \sigma$ sjell që $\rho \; o \; \tau \subseteq \sigma \; o \; \tau$ dhe $\tau \; o \; \rho \subseteq \tau$ o σ. Rezultati i mirënjohur që vijon është shumë i rëndësishëm.

LEMË 1.101. *Në qoftë se ϱ dhe η janë relacione ekuivalence në bashkësinë X, dhe $\varrho \; o \; \eta = \eta \; o \; \varrho$ atëherë $\varrho \; o \; \eta$ është një relacion ekuivalence në X me vetinë $\varrho \; o \; \eta = \eta \; o \; \varrho = \varrho \vee \eta$.*

VËRTETIM. Është e qartë që $\varrho \; o \; \eta$ është reflektiv. Supozojmë që $a\varrho \; o \; \eta b \; (a, b \in X)$. Atëherë ekziston një element x në X i tillë që $a\varrho x$ dhe $x\eta b$. Kjo sjell $b\eta x$ dhe $x\varrho a$ domethënë $b\eta \; o \; \varrho a$ që nga $b\varrho \; o \; \eta a$. Supozojmë që $a\varrho \; o \; \eta b$ dhe $b\varrho \; o \; \eta c \; (a, b, c \in X)$. Atëherë $a(\varrho \; o \; \eta) \; o \; (\varrho \; o \; \eta)c$ që nga $a\varrho \; o \; \varrho \; o \; \eta \; o \; \eta c$ domethënë $a\varrho \; o \; \eta c$. Kështu $\varrho \; o \; \eta$ është një relacion ekuivalence i tillë që $\varrho \subseteq \varrho \; o \; \eta$ dhe $\eta \subseteq \varrho \; o \; \eta$ që nga $\varrho \vee \eta \subseteq \varrho \; o \; \eta$. Nga ana tjetër $\varrho \; o \; \eta \subseteq (\varrho \vee \eta) \; o \; (\varrho \vee \eta) = \varrho \vee \eta$ domethënë $\varrho \; o \; \eta = \eta \; o \; \varrho = \varrho \vee \eta$.

Bashkimi $\mathscr{L} \cup \mathscr{R}$ i relacioneve të Grinit $\mathscr{L}$ dhe $\mathscr{R}$ në gjysmëgrupin ternar S në përgjithësi nuk është relacion ekuivalence në S. Superiori $\mathscr{L} \vee \mathscr{R} = \mathcal{D}$ i $\mathscr{L}$ dhe $\mathscr{R}$ është relacioni i ekuivalencës më i vogël në S që përmban $\mathscr{L}$ dhe $\mathscr{R}$ domethënë $\mathcal{D}$ është prerja e të gjitha relacioneve të ekuivalencës në S që përmbajnë $\mathscr{L}$ dhe $\mathscr{R}$. Le të japim tani rezultatin e rëndësishëm që vijon:

LEMË 1.102. *Le të jenë $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ dhe $\mathcal{D} = \mathscr{L} \vee \mathscr{R}$ relacionet e Grinit në gjysmëgrupin ternar S. Atëherë $\mathcal{D} = \mathscr{L} \; o \; \mathscr{R} = \mathscr{R} \; o \; \mathscr{L}$.*

VËRTETIM. Në bazë të Lemës 1.69 ne duhet të tregojmë që $\mathscr{L}\ o\ \mathscr{R} = \mathscr{R}\ o\ \mathscr{L}$. Në qoftë se $a\mathscr{L}\ o\ \mathscr{R}b$ $(a, b \in S)$ atëherë ekziston një element c në S i tillë që $a\mathscr{L}c$ dhe $c\mathcal{R}b$. Kjo do të thotë që $a \cup SSa = c \cup SSc$ dhe $c \cup cSS = b \cup bSS$ që nga $a = x_1x_2c$ dhe $b = cy_1y_2$ për x, y në S. Kështu kemi $a \cup aSS = xc \cup xcSS = xb \cup xbSS = xcy \cup xcySS$ dhe $xcy \cup xcySS = ay \cup aySS = cy \cup cySS = b \cup bSS$ që nga $a\mathscr{R}xcy$ dhe $xcy\mathscr{L}b$ domethënë $a\mathscr{R}\ o\ \mathscr{L}b$. Kështu marrim që $\mathscr{L}\ o\ \mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}\ o\ \mathscr{L}$. Meqenëse përfshierja $\mathscr{R}\ o\ \mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}\ o\ \mathscr{R}$ mund të provohet në mënyrë të ngjashme, atëherë $\mathscr{L}\ o\ \mathscr{R} = \mathscr{R}\ o\ \mathscr{L}$.

1.4 GJYSMËGRUPET TERNARE TË RREGULLT

Në këtë pjesë do të japim disa veti kryesore të gjysmëgrupeve ternare të rregullt me anë të disa nocioneve, teoremave dhe pohimeve siç do të shohim në vijim.

PËRKUFIZIM 1.103. [1] *Një gjysmëgrup ternar S quhet i regullt në qoftë se për çdo $a \in S$ ekzistojnë $x, y \in S$ të tillë që $a = axaya$.*

Është e qartë që një gjysmëgrup ternar i rregullt S plotëson kushtin $SSS = S$.

POHIM 1.104. *Një gjysmëgrup ternar S është i rregullt vetëm atëherë kur për çdo $a \in S$ ekzistojnë $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in S$ të tillë që $a = (ax_1x_2)(y_1ay_2)(z_1z_2a)$.*

VËRTETIM. Meqenëse gjysmëgrupi ternar S është i rregullt kemi që për çdo $a \in S$ ekzistojnë $x, y \in S$ të tillë që $a = axaya$. Gjithashtu, meqenëse S është i rregullt ai plotëson kushtin $SSS = S$. Kështu, për elementin $x \in S$ ekzistojnë $x_1, x_2, y_1 \in S$ të tillë që $x = x_1x_2y_1$. Po kështu, për $y \in S$ ekzistojnë $y_2, z_1, z_2 \in S$ të tillë që $y = y_2z_1z_2$.Atëherë $a = a(x_1x_2y_1)a(y_2z_1z_2)a = (ax_1x_2)(y_1ay_2)(z_1z_2a)$.

Anasjelltas, për çdo $a \in S$ ekzistojnë $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in S$ të tillë që $a = (ax_1x_2)(y_1ay_2)(z_1z_2a)$. Atëherë $a = a(x_1x_2y_1)a(y_2z_1z_2)a$. Shënojmë $x = x_1x_2y_1$ dhe $y = y_2z_1z_2$. Kështu $a = axaya$ që nga S është i rregullt.

TEOREMË 1.105. [1] *Në një gjysmëgrup ternar S pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

(i) *S është i rregullt*

(ii) *Për çdo ideal të djathtë* R, *ideal lateral* M *dhe ideal të majtë* L *të* S, $RML = R \cap M \cap L$

(iii) $(a)(b)(c) = (a) \cap (b) \cap (c)$ *për çdo* $a, b, c \in S$

(iv) *Për çdo* $a \in S$, $(a)_r(a)_m(a)_l = (a)_r \cap (a)_m \cap (a)_l$

VËRTETIM. (i) sjell (ii) Në bazë të Pohimit 1.47 $RML \subseteq R \cap M \cap L$. Në qoftë se S është i rregullt dhe $a \in R \cap M \cap L$ atëherë ekzistojnë $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in S$ të tillë që $a = (ax_1x_2)(y_1ay_2)(z_1z_2a)$. Kështu $a \in RML$.

(ii) sjell (iii) dhe (iii) sjell (iv) janë evidente.

(iv) sjell (i) Le të jetë $a \in S$. Meqenëse $a \in (a)_r \cap (a)_m \cap (a)_l$ atëherë $a = a_1a_2a_3$ ku $a_1 = a$ ose $a_1 = ax_1x_2$, $a_2 = a$ ose $a_2 = y_1ay_2$ ose $a_2 = u_1u_2au_3u_4$ dhe $a_3 = a$ ose $a_3 = z_1z_2a$. Supozojmë së pari që $a_2 = u_1u_2au_3u_4$. Atëherë $a = a_1a_2a_3 = a_1u_1u_2au_3u_4a_3 = (a_1u_1u_2)a(u_3u_4a_3) = v_1av_2$ për $v_1, v_2 \in S$. Kështu $a_2 = u_1u_2au_3u_4 = u_1u_2v_1av_2u_3u_4 = (u_1u_2v_1)a(v_2u_3u_4) = y_1ay_2$ për $y_1, y_2 \in S$. Në rastin kur $a_i = a$ $(i = 1,2,3)$ vëmë re që $a_i = a_1a_2a_3$. Kjo do të thotë që në të gjitha rastet kemi $a_1 = ax_1x_2, a_2 = y_1ay_2$ dhe $a_3 = z_1z_2a$. Që këtej rrjedh rezultati i dëshiruar.

PËRKUFIZIM 1.106. [1] *Një ideal* I *i gjysmëgrupit ternar* S *quhet i rregullt në qoftë se* $I \cup RML = R \cap M \cap L$ *për çdo ideal të djathtë* $R \supseteq I$, *ideal lateral* $M \supseteq I$, *ideal të majtë* $L \supseteq I$.

Vërejmë që S është gjithnjë ideal i rregullt. Çdo ideal që përmban një ideal të rregullt është gjithashtu ideal i rregullt. Në qoftë se për ndonjë ideal të djathtë R, ideal lateral M dhe ideal të majtë L, RML përmban një ideal të rregullt, atëherë $RML = R \cap M \cap L$. Gjithashtu, për çdo tre ideale I_1, I_2, I_3 të tillë që $I_1I_2I_3$ përmban një ideal të rregullt kemi $I_{\sigma(1)}I_{\sigma(2)}I_{\sigma(3)} = I_1 \cap I_2 \cap I_3$. Në vijim do të vërtetojmë disa pohime dhe teorema të formuluar nga [1].

TEOREMË 1.107. *Le të jetë* I *një ideal i rregullt i gjysmëgrupit ternar* S. *Në qoftë se për ndonjë ideal të djathtë* R, *ideal lateral* M *dhe ideal të majtë* L *të* S, $RML \subseteq I$ *atëherë* $R \cap M \cap L \subseteq I$.

VËRTETIM. Supozojmë që $RML \subseteq I$ dhe I është ideal i rregullt. Atëherë $R \cap M \cap L \subseteq (I \cup R)_r \cap (I \cup M)_m \cap (I \cup L)_l = I \cup ((I \cup R)_r(I \cup M)_m(I \cup L)_l) = I \cup (I(I \cup M)_m(I \cup L)_l)(RI(I \cup L)_l) \cup RMI \cup RML \subseteq I$.

POHIM 1.108. [21] *Çdo ideal i rregullt dhe fortësisht jo i reduktueshëm është prim.*

VËRTETIM. Le të jetë S një gjysmëgrup ternar dhe I një ideal i rregullt dhe fortësisht jo i reduktueshëm i S. Le të jetë $I_1I_2I_3 \subseteq I$. Atëherë $I_1I_2I_3 \cup\ I = I$. Gjithashtu, meqenëse I është ideal i rregullt kemi që $I_1I_2I_3 \cup\ I = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \subseteq I$ dhe meqenëse I është fortësisht jo i reduktueshëm kemi që $I_1 \subseteq I$ ose $I_2 \subseteq I$ ose $I_3 \subseteq I$ që nga I është ideal prim.

POHIM 1.109. [21] *Çdo ideal i rregullt është semiprim.*

VËRTETIM. Le të jetë S një gjysmëgrup ternar dhe I një ideal i rregullt i S. Le të jetë $JJJ \subseteq I$. Atëherë $JJJ \cup I = I$. Meqenëse I është ideal i rregullt kemi që $JJJ \cup I = J \cap J \cap J = J \subseteq I$ që nga I është ideal semiprim.

LEMË 1.110. [21] *Le të jetë $\Phi : S \to T$ një homomorfizëm injektiv i gjysmëgrupit ternar të rregullt S në gjysmëgrupin ternar T. Atëherë imΦ është i rregullt. Në qoftë se f është një element idempotent në imΦ atëherë ekziston një element idempotent e në S i tillë që $\Phi(e) = f$.*

VËRTETIM. Për çdo $z \in$ imΦ, $z = \Phi(a)$ për $a \in S$. Meqenëse S është i rregullt kemi që ekzistojnë $x, y \in S$ të tillë që $a = axaya$. Atëherë $\Phi(a) = \Phi(a)\Phi(x)\Phi(a)\Phi(y)\Phi(a)$ sepse Φ është homomorfizëm. Kështu $z = zuzvz$ ku $u = \Phi(x)$ dhe $v = \Phi(y)$. Kjo tregon që imΦ është i rregullt. Le të jetë tani f një element idempotent i imΦ. Atëherë $fff = f$ dhe ekziston $e \in S$ i tillë që $\Phi(e) = f$. Kështu $f = \Phi(e)\Phi(e)\Phi(e) = \Phi(eee)$ dhe meqenëse Φ është injektiv $eee = e$.

KAPITULLI 2

KUAZI-IDEALET DHE BI-IDEALET NË GJYSMËGRUPET TERNARE

Në këtë kapitull paraqitet kuptimi i kuazi-idealit në një gjysmëgrup ternar si dhe disa veti lidhur me kuazi-idealet. Gjithashtu ne do të përgjithësojmë konceptin e kuazi-idealit duke futur konceptin e bi-idealit në një gjysmëgrup ternar si dhe duke dhënë disa veti që paraqiten nëpërmjet disa pohimeve dhe teoremave në vijim.

2.1 KUAZI-IDEALET NË GJYSMËGRUPET TERNARE

Këtu do shohim përkufizimin e kuazi-idealit në një gjysmëgrup ternar si dhe disa karakterizime bazë të tyre.

PËRKUFIZIM 2.0. [1] *Një nënbashkësi jo-boshe Q e gjysmëgrupit ternar S quhet kuazi-ideal i S në qoftë se $QSS \cap SQS \cap SSQ \subseteq Q$ dhe $QSS \cap SSQSS \cap SSQ \subseteq Q$.*

POHIM 2.1. [22] *Çdo ideal i majtë L i gjysmëgrupit ternar S është kuazi-ideal i S.*

VËRTETIM. Le të jetë $a \in LSS \cap SLS \cap SSL$. Që këtej $a \in SSL$. Nga ana tjetër $SSL \subseteq L$ sepse L është ideal i majtë i S. Kështu $a \in L$ që nga $LSS \cap SLS \cap SSL \subseteq L$. Që këtej është e qartë që $LSS \cap SSLSS \cap SSL \subseteq L$.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi:

POHIM 2.2. [22] *Çdo ideal i djathtë R [ideal lateral M, ideal I] i gjysmëgrupit ternar S është kuazi-ideal i S.*

POHIM 2.3. [22] *Në qoftë se S është një gjysmëgrup ternar me 0 ateherë çdo kuazi-ideal Q i S e përmban 0.*

VËRTETIM. Për çdo $k \in Q, 0 = 00k = 0k0 = k00 \in SSQ \cap SQS \cap QSS \subseteq Q$.

Në qoftë se S është një gjysmëgrup ternar pa 0, atëherë një kuazi-ideal Q quhet *i mirëfilltë* në qoftë se $Q \neq S$.

POHIM 2.4. [22] *Çdo kuazi-ideal* Q *i gjysmëgrupit ternar* S *është nëngjysmëgrup ternar i* S.

VËRTETIM. $Q^3 \subseteq QSS \cap SQS \cap SSQ \subseteq Q$ sepse Q është kuazi-ideal i S.

POHIM 2.5. [22] *Prerja e idealit të djathtë R, idealit lateral M dhe idealit të majtë L të gjysmëgrupit ternar S është kuazi-ideal i S.*

VËRTETIM. Nga Pohimi 1.47 $RML \subseteq R \cap M \cap L$. Kështu, prerja $R \cap M \cap L$ nuk është boshe. Meqenëse $(R \cap M \cap L)SS \cap S(R \cap M \cap L)S \cap SS(R \cap M \cap L) \subseteq RSS \cap SMS \cap SSL \subseteq R \cap M \cap L$ dhe $(R \cap M \cap L)SS \cap S(R \cap M \cap L)S \cap SS(R \cap M \cap L) \subseteq RSS \cap SSMSS \cap SSL \subseteq R \cap M \cap L$ kemi që $R \cap M \cap L$ është kuazi-ideal i S.

POHIM 2.6. [22] *Prerja e kuazi-idealit* Q *dhe e nëngjysmëgrupit ternar* T *të një gjysmëgrupi ternar* S *ose është boshe ose është kuazi-ideal i* T.

VËRTETIM. Në qoftë se $T \cap Q$ nuk është boshe, atëherë $T \cap Q$ është një nënbashkësi e T e tillë që$(T \cap Q)TT \cap T(T \cap Q)T \cap TT(T \cap Q) \subseteq T^3 \subseteq T$ dhe$(T \cap Q)TT \cap TT(T \cap Q)TT \cap TT(T \cap Q) \subseteq T^3 \subseteq T$ si dhe$(T \cap Q)TT \cap T(T \cap Q)T \cap TT(T \cap Q) \subseteq QTT \cap TQT \cap TTQ \subseteq Q$ dhe$(T \cap Q)TT \cap TT(T \cap Q)TT \cap TT(T \cap Q) \subseteq QTT \cap TTQTT \cap TTQ \subseteq Q$. Këto sjellin që $T \cap Q$ është kuazi-ideal i T.

POHIM 2.7. [22] *Prerja e një kuazi-ideali Q dhe e një nëngjysmëgrupi ternar B me* 0 *të një gjysmëgrupi ternar S me* 0*, është kuazi-ideal i B.*

Vërtetimi është i ngjashëm me atë të Pohimit 2.6.

POHIM 2.8. [22] *Le të jetë e një element idempotent i gjysmëgrupit ternar S dhe R, M, L përkatësisht ideal i djathtë, lateral dhe i majtë i S. Atëherë Ree, eeL dhe $eeMee$ janë kuazi-ideale të S.*

VËRTETIM. Mjafton të provojmë relacionet $Ree = R \cap (SeS \cup SSeSS) \cap See$, $eeL = eeS \cap (SeS \cup SSeSS) \cap L$ dhe $eeMee = eSS \cap M \cap SSe$. Le të jetë $x \in Ree$.Atëherë $x = aee, a \in R$.Kështu $x \in R$ dhe $x \in See$.Gjithashtu $x \in SeS$ dhe $x = aee = aeeee \in SSeSS$. Kjo do të thotë që $x \in SeS \cup SSeSS$. Pra $x \in R \cap (SeS \cup SSeSS) \cap See$ që nga $Ree \subseteq R \cap (SeS \cup SSeSS) \cap$

See.Le të jetë tani $x \in R \cap (SeS \cup SSeSS) \cap See$. Kjo do të thotë që $x \in R \cap See$ dhe $x \in SeS \cup SSeSS$.Atëherë $x = aee, a \in S$.Kështu $x = aee = aeeee = xee \in Ree$.Kjo do të thotë që $R \cap (SeS \cup SSeSS) \cap See \subseteq Ree$.Në mënyrë të ngjashme tregohet barazimi $eeL = eeS \cap (SeS \cup SSeSS) \cap L$. Të tregojmë tani barazimin $eeMee = eSS \cap M \cap SSe$. Le të jetë $x \in eeMee$. Atëherë $x = eeaee, a \in M$. Kështu $x \in eSS \cap SSe$ dhe $x \in M$. Kjo do të thotë që $x \in eSS \cap M \cap SSe$ që nga $eeMee \subseteq eSS \cap M \cap SSe$. Le të jetë tani $x \in eSS \cap M \cap SSe$. Që këtej kemi që $x \in eSS \cap SSe$ dhe $x \in$ M. Kështu dhe $x = eab$ dhe $x = cde$ ku $a, b, c, d \in S$.Atëherë $eexee = eeeabee = eabee = cdeee = cde = x$ që nga $x \in eeMee$.Kështu $eSS \cap M \cap SSe \subseteq eeMee$.

POHIM 2.9. [22] *Çdo kuazi-ideal Q i gjysmëgrupit ternar S është prerje e idealit të majtë $Q \cup SSQ$, idealit lateral $Q \cup SQS \cup SSQSS$ dhe idealit të djathtë $Q \cup QSS$ të S.*

VËRTETIM. Përfshierja $Q \subseteq (Q \cup SSQ) \cap (Q \cup SQS \cup SSQSS) \cap (Q \cup QSS)$ është evidente.

Anasjelltas, le të jetë a një element i prerjes $(Q \cup SSQ) \cap (Q \cup SQS \cup SSQSS) \cap (Q \cup QSS)$. Meqenëse Q është kuazi-ideal i S, rasti i dytë sjell që $a \in SSQ \cap (SQS \cup SSQSS) \cap QSS \subseteq Q$. Kështu $(Q \cup SSQ) \cap (Q \cup SQS \cup SSQSS) \cap (Q \cup QSS) \subseteq Q$.

POHIM 2.10. [22] *Një nënbashkësi jo-boshe e gjysmëgrupit ternar S është kuazi-ideal i S* ***vetëm atëherë kur*** *ajo është prerje e një ideali të majtë, lateral dhe të djathtë të S.*

VËRTETIM. Le të jetë $L = \bigcup_{q \in Q} (q)_l$. Për çdo $s_1, s_2 \in S$ dhe për çdo $a \in L$ kemi që $a \in (q)_l$ për ndonjë $q \in Q$. Në qoftë se $a = q$ atëherë $s_1 s_2 a = s_1 s_2 q \in (q)_l \subseteq \bigcup_{q \in Q} (q)_l = L$. Në qoftë se $a \in SSq$ kemiqë $a = s_3 s_4 q$ ku $s_3, s_4 \in S$.Kështu $s_1 s_2 a = s_1 s_2 (s_3 s_4 q) = (s_1 s_2 s_3) s_4 q \in SSq \subseteq (q)_l \subseteq \bigcup_{q \in Q} (q)_l = L$. Kështu L është ideal i majtë i S. Tani le të jetë $M = \bigcup_{q \in Q} (q)_t$. Për çdo $s_1, s_2 \in S$ dhe për çdo $a \in M$ kemi që $a \in (q)_t$ për ndonjë $q \in Q$. Në qoftë se $a = q$ atëherë $s_1 a s_2 = s_1 q s_2 \in SqS \subseteq (q)_t \subseteq \bigcup_{q \in Q} (q)_t = M$.Nëqoftëse $a \in SqS$atëherë $a = s_3 q s_4$ ku $s_3, s_4 \in S$. Atëherë $s_1 a s_2 = s_1 (s_3 q s_4) s_2 \in SSqSS \subseteq (q)_t \subseteq M$.Në qoftë se $a \in SSqSS$ atëherë $a = s_3 s_4 q s_5 s_6$. Kështu$s_1 a s_2 = s_1 (s_3 s_4 q s_5 s_6) s_2 = (s_1 s_3 s_4) q (s_5 s_6 s_2) \subseteq SqS \subseteq (q)_t \subseteq M$. Kështu M është ideal lateral i S. Le të jetë $R = \bigcup_{q \in Q} (q)_r$. Për çdo $s_1, s_2 \in S$ dhe për çdo $a \in R$ kemi që $a \in (q)_r$ për ndonjë $q \in Q$. Në qoftë se $a = q$ atëherë $a s_1 s_2 = q s_1 s_2 \in qSS \subseteq (q)_r \subseteq R$. Në qoftë se $a \in qSS$ atëherë $a = q s_3 s_4$ku $s_3, s_4 \in S$.Kështu $a s_1 s_2 = (q s_3 s_4) s_1 s_2 = q s_3 (s_4 s_1 s_2) \in qSS \subseteq (q)_r \subseteq R$. Kjo do të thotë që R është ideal i djathtë i S. Është e qartë që $Q \subseteq L \cap M \cap R$. Të

tregojmë përfshierjen tjetër. Nga ana tjetër, nga veprimet me bashkësitë kemi $L \cap M \cap R = (Q \cup QSS) \cap (Q \cup SQS \cup SSQSS) \cap (Q \cup SSQ) = Q \cup [QSS \cap (SQS \cup SSQSS) \cap SSQ] \subseteq Q$.
Kështu $Q = L \cap M \cap R$.
Anasjelltas, supozojmë që $Q = L \cap M \cap R$ ku L është ideal i majtë i S, M është ideal lateral i S dhe R është ideal i djathtë i S. Atëherë $SSQ \cap SQS \cap QSS = SS(L \cap M \cap R) \cap S(L \cap M \cap R)S \cap (L \cap M \cap R)SS \subseteq SSL \cap SMS \cap RSS \subseteq L \cap M \cap R = Q$ dhe $SSQ \cap SSQSS \cap QSS = SS(L \cap M \cap R) \cap SS(L \cap M \cap R)SS \cap (L \cap M \cap R)SS \subseteq SSL \cap SSMSS \cap RSS \subseteq L \cap M \cap R = Q$.
Kështu $Q = L \cap M \cap R$ është kuazi-ideal i S.

POHIM 2.11. [22] Në qoftë se Q është një kuazi ideal i mirëfilltë i gjysmëgrupit ternar S me 0 i tillë që Q nuk përmban ideale të majtë [lateralë, të djathtë] të S si dhe $SSQ \cap SQS \not\subset Q, SQS \cap QSS \not\subset Q$ dhe $SSQ \cap QSS \not\subset Q$ atëherë $SSQ[SQS, QSS]$ është ideal i mirëfilltë i majtë [lateral, i djathtë] i S.

VËRTETIM. Të tregojmë që SSQ është ideal i mirëfilltë i majtë. Supozojmë që $SSQ = \{0\}$. Atëherë $SSQ = \{0\} \subseteq Q$ gjë që nuk është e mundur sepse Q nuk përmban ideale të majtë. Në qoftë se $SSQ = S$ atëherë $SSQ \cap SQS \cap QSS = S \cap SQS \cap QSS = SQS \cap QSS \subseteq Q$ gjë që kundërshton kushtin. Të tregojmë tani që SQS është ideal lateral i mirëfilltë i S. Në qoftë se $SQS = \{0\}$ atëherë $SQS = \{0\} \subseteq Q$ gjë që nuk mund të ndodhi pasi Q nuk përmban ideale lateralë të S. Në qoftë se $SQS = S$ atëherë $SSQ \cap SQS \cap QSS = SSQ \cap S \cap QSS = SSQ \cap QSS \subseteq Q$ gjë që është kontradiksion. Të tregojmë që QSS është ideal i mirëfilltë i djathtë. Në qoftë se $QSS = \{0\}$ atëherë $QSS = \{0\} \subseteq Q$ gjë që nuk është e mundur. Në qoftë se $QSS = S$ atëherë $SSQ \cap SQS \cap QSS = SSQ \cap SQS \cap S = SSQ \cap SQS \subseteq Q$ gjë që nuk mund të ndodhi pasi kundërshton kushtin e dhënë.

POHIM 2.12. [22] *Prerja e një bashkësie çfarëdo kuazi-idealesh të gjysmëgrupit ternar* S *ose është boshe ose është kuazi-ideal i* S.

VËRTETIM. Le të jetë $(Q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ një bashkësi kuazi-idealesh të S. Në qoftë se $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$ nuk ështëboshe,atëherëpërçdo $Q_\mu, \mu \in \Lambda, D = SS(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda) \cap S(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda)S \cap (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda)SS \subseteq SS\, Q_\mu \cap S\, Q_\mu S \cap Q_\mu SS \subseteq Q_\mu$. Kështu $D \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$ gjë që përfundon vërtetimin.

POHIM 2.13. [22] *Prerja e një bashkësie çfarëdo kuazi-idealesh të gjysmëgrupit ternar S me* 0 *është kuazi-ideal i S.*

VËRTETIM. Duke qenë se çdo kuazi-ideal i S përmban elementin zero 0, prerja e çdo bashkësie kuazi-idealesh të S nuk është boshe. Vërtetimi mund të vazhdohet në mënyrë të ngjashme me vërtetimin e pohimit të mësipërm.

Le të jetë X një nënbashkësi jo-boshe e gjysmëgrupit ternar S. *Kuazi-ideal i S i gjeneruar nga X* është prerja $(X)_q$ e të gjithë kuazi-idealeve të S që përmbajnë X, e cila në fakt është kuazi-ideal i S. (Natyrisht, $(X)_q$ përmbahet në çdo kuazi-ideal të S që përmban X). Në qoftë se nënbashkësia X konsiston në një element të vetëm x, atëherë $(x)_q$ quhet *kuazi-ideali kryesor i S i gjeneruar nga x.*

POHIM 2.14. [22] *Në qoftë se X është një nënbashkësi çfarëdo jo-boshe e gjysmëgrupit ternar S, ateherë $(X \cup SSX) \cap (X \cup SXS \cup SSXSS) \cap (X \cup XSS)$ është kuazi-ideali $(X)_q$ i S i gjeneruar nga X.*

VËRTETIM. $D = (X \cup SSX) \cap (X \cup SXS \cup SSXSS) \cap (X \cup XSS)$ është kuazi-ideal i S që përmban X, prandaj $(X)_q \subseteq D$. Nga ana tjetër, kuazi-ideali $Q = (X)_q$ i S ka formën $(X)_q = Q = (Q \cup SSQ) \cap (Q \cup SQS \cup SSQSS) \cap (Q \cup QSS)$. Kjo dhe përfshierja $X \subseteq Q$ sjellin $D = (X \cup SSX) \cap (X \cup SXS \cup SSXSS) \cap (X \cup XSS) \subseteq (Q \cup SSQ) \cap (Q \cup SQS \cup SSQSS) \cap (Q \cup QSS) = (X)_q$. Kështu ne kemi $(X)_q = D$.

VËREJTJE 2.15. [22] 1. Kuazi-ideali kryesor $(x)_q$ i gjysmëgrupit ternar S të gjeneruar nga elementi x i S ka formën $(x)_q = (x \cup SSx) \cap (x \cup SxS \cup SSxSS) \cap (x \cup xSS)$ $(*)$

2. Le të jetë X një nënbashkësi jo-boshe e gjysmëgrupit ternar S dhe x një element i S. Atëherë është e lehtë të provohen barazimet $(X)_q = X \cup (SSX \cap (SXS \cup SSXSS) \cap XSS)$ dhe $(x)_q = x \cup (SSx \cap (SxS \cup SSxSS) \cap xSS)$. Meqenëse $(X)_l = X \cup SSX$, $(X)_t = X \cup SXS \cup SSXSS$ dhe $(X)_r = X \cup XSS$ janë përkatësisht ideali i majtë, lateral dhe i djathtë i S të gjeneruar nga X kemi që $(X)_q = (X)_l \cap (X)_t \cap (X)_r$. Në veçanti, barazimi $(*)$ sjell $(x)_q = (x)_l \cap (x)_t \cap (x)_r$ ku $(x)_l = x \cup SSx$, $(x)_t = x \cup SxS \cup SSxSS$ dhe $(x)_r = x \cup xSS$ janë përkatësisht ideali kryesor i majtë, lateral dhe i djathtë i S të gjeneruar nga x.

TEOREMË 2.16. [22] *Familja* $(Q_i)_{i\in I}$ *e të gjithë kuazi-idealeve të gjysmëgrupit ternar S është laticë e plotë.*

VËRTETIM. Nga Pohimi 1.96 kemi që familja e te gjithe kuazi-idealeve $(Q_i)_{i\in I}$ është një bashkësi pjesërisht e renditur në lidhje me përfshierjen e bashkësive. Të tregojmë që inferiori i $(Q_i)_{i\in I}$ është $\bigwedge_{i\in I} Q_i = \bigcap_{i\in I} Q_i$. Është e qartë që $\bigcap_{i\in I} Q_i \subseteq Q_i,\ \forall i \in I.$ Le të jetë Q një kuazi $-$ ideal i S i tillë që $Q \subseteq Q_i, \forall\, i \in I$. Është evidente që $Q \subseteq \bigcap_{i\in I} Q_i$. Të tregojmë tani që superiori i $(Q_i)_{i\in I}$ është $\bigvee_{i\in I} Q_i = (\bigcup_{i\in I} Q_i)_r \cap (\bigcup_{i\in I} Q_i)_m \cap (\bigcup_{i\in I} Q_i)_l$. Është e qartë që $Q_i \subseteq \bigvee_{i\in I} Q_i, \forall\, i \in I$. Le të jetë Q një kuazi-ideal i S i tillë që $Q_i \subseteq Q, \forall\, i \in I$. Atëherë $\bigvee_{i\in I} Q_i = (\bigcup_{i\in I} Q_i \cup (\bigcup_{i\in I} Q_i)SS) \cap (\bigcup_{i\in I} Q_i \cup S(\bigcup_{i\in I} Q_i)S \cup SS(\bigcup_{i\in I} Q_i)SS) \cap \left(\bigcup_{i\in I} Q_i \cup SS(\bigcup_{i\in I} Q_i)\right) = \bigcup_{i\in I} Q_i \cup \left((\bigcup_{i\in I} Q_i)SS \cap (S(\bigcup_{i\in I} Q_i)S \cup SS(\bigcup_{i\in I} Q_i)SS) \cap SS(\bigcup_{i\in I} Q_i)\right) \subseteq QSS \cap (SQS \cup SSQSS) \cap SSQ \subseteq Q$.

TEOREMË 2.17. [22] *Një nënbashkësi* Q *e gjysmëgrupit ternar të rregullt S është kuazi-ideal i S vetëm atëherë kur* $QSQSQ \cap QSSQSSQ \subseteq Q$.

VËRTETIM. Le të jetë S një gjysmëgrup i rregullt dhe Q një kuazi-ideal i S. Atëherë $QSQSQ \cap QSSQSSQ \subseteq SSQ,\ QSQSQ \cap QSSQSSQ \subseteq QSS$ dhe $QSQSQ \cap QSSQSSQ \subseteq SQS \cup SSQSS$ kështu që $QSQSQ \cap QSSQSSQ \subseteq SSQ \cap (SQS \cup SSQSS) \cap QSS \subseteq Q$.

Anasjelltas, le të jetë S një gjysmëgrup ternar i rregullt dhe Q një nënbashkësi e S e tillë që $QSQSQ \cap QSSQSSQ \subseteq Q$. Atëherë $QSS \cap (SQS \cup SSQSS) \cap SSQ = QSS(SQS \cup SSQSS)SSQ = (QSS)(SQS)(SSQ) \cup (QSS)(SSQSS)(SSQ) \subseteq QSQSQ \cup QSSQSSQ \subseteq Q$.

TEOREMË 2.18. [22] *Në qoftë se S është një gjysmëgrup ternar i rregullt dhe* Q_1, Q_2, Q_3 *janë kuazi-ideale të S atëherë* $Q_1Q_2Q_3$ *është kuazi-ideal i* S.

VËRTETIM. $(Q_1Q_2Q_3)S(Q_1Q_2Q_3)S(Q_1Q_2Q_3) \cup (Q_1Q_2Q_3)SS(Q_1Q_2Q_3)SS(Q_1Q_2Q_3) = (Q_1(Q_2Q_3S)Q_1(Q_2Q_3S)Q_1)Q_2Q_3 \cup (Q_1(Q_2Q_3S)SQ_1(Q_2Q_3S)SQ_1)Q_2Q_3 \subseteq Q_1Q_2Q_3$.

TEOREMË 2.19. [22] *Në qoftë se për çdo kuazi-ideal* Q *të gjysmëgrupit ternar* $S, Q^3 = Q$ *atëherë S është gjysmëgrup ternar i rregullt.*

VËRTETIM. Le të jetë R një ideal i djathtë i S, M një ideal lateral i S dhe L një ideal i majtë i S. Meqenëse $R \cap M \cap L$ është kuazi-ideal i S kemi që $R \cap M \cap L = (R \cap M \cap L)^3 = (R \cap M \cap L)(R \cap M \cap L)(R \cap M \cap L) \subseteq RML$. Nga ana tjetër $RML \subseteq R \cap M \cap L$. Kështu $RML = R \cap M \cap L$. Kjo do të thotë që S është i rregullt.

PËRKUFIZIM 2.20. [22] *Një kuazi-ideal Q i një gjysmëgrupi ternar S quhet minimal në qoftë se Q nuk përmban kuazi-ideale të mirëfillta të S.*

TEOREMË 2.21. [22] *Një kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar S është minimal vetëm atëherë kur është prerje e një ideali të majtë minimal L , një ideali të djathtë minimal R dhe një ideali lateral minimal M të S.*

VËRTETIM. Supozojmë se Q është një kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar S dhe $Q = R \cap M \cap L$ ku R, L dhe M janë përkatësisht ideale minimalë të djathtë, minimalë të majtë dhe minimalë lateralë të gjysmëgrupit ternar S. Të provojmë që Q është minimal. Në qoftë se Q' është një kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar S që përmbahet në Q, atëherë $SSQ' \subseteq SSQ \subseteq SSL \subseteq L$, $Q'SS \subseteq QSS \subseteq RSS \subseteq R$ dhe $SQ'S \cup SSQ'SS \subseteq SQS \cup SSQSS \subseteq SMS \cup SSMSS \subseteq M$. Meqenëse SSQ', $Q'SS$ dhe $SQ'S \cup SSQ'SS$ janë ideal i majtë, i djathtë dhe lateral, përkatësisht, atëherë nga minimaliteti i L, R dhe M kemi $SSQ' = L$, $Q'SS = R$ dhe $SQ'S \cup SSQ'SS = M$. Kështu që gjejmë $Q = R \cap M \cap L = SSQ' \cap (SQ'S \cup SSQ'SS) \cap Q'SS \subseteq Q'$ atëherë kemi $Q \subseteq Q'$ dhe $Q' \subseteq Q$ kështu që $Q = Q'$. Pra Q është një kuazi-ideal minimal i gjysmëgrupit ternar S.

Anasjelltas, le të jetë $a \in Q$ ku Q është një kuazi-ideal minimal i gjysmëgrupit ternar S. Kemi që $SSa \cap (SaS \cup SSaSS) \cap aSS$ është kuazi-ideal i S, si prerje e një ideali të majtë, një ideali të djathtë dhe një ideali lateral të S. Atëherë $SSa \cap (SaS \cup SSaSS) \cap aSS \subseteq SSQ \cap (SQS \cup SSQSS) \cap QSS \subseteq Q$. Nga minimaliteti i Q gjejmë $SSa \cap (SS \cup SSaSS) \cap aSS = Q$. Provojmë që SSa është ideal i majtë minimal i S. Në qoftë se L është një ideal i majtë i gjysmëgrupit ternar S që përmbahet në SSa, atëherë $L \cap (SaS \cup SSaSS) \cap aSS \subseteq SSa \cap (SaS \cup SSaSS) \cap aSS = Q$. Por $L \cap (SaS \cup SSaSS) \cap aSS$ është kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar S dhe nga minimaliteti i Q kemi $L \cap (SaS \cup SSaSS) \cap aSS = Q$, që nga $Q \subseteq L$. Tani kemi $SSa \subseteq SSQ \subseteq SSL \subseteq L$. Atëherë nga përfshierjet $SSa \subseteq L$ dhe $L \subseteq SSa$ kemi që $SSa = L$. Pra, SSa është kuazi-ideal i majtë minimal i gjysmëgrupit ternar S. Në mënyrë të ngjashme provohet edhe minimaliteti i idealit të djathtë aSS dhe idealit lateral $SaS \cup SSaSS$.

POHIM 2.22. [22] *Çdo ideal lateral minimal i gjysmëgrupit ternar S është ideal minimal i S.*

VËRTETIM. Le të jetë M një ideal lateral minimal i S. Ne do të tregojmë që M është ideal minimal i S. Le të jetë $m \in M$. Atëherë $SmS \cup SSmSS$ është ideal lateral i S dhe $SmS \cup SSmSS \subseteq SMS \cup SSMSS \subseteq M$. Meqenëse M është minimal kemi që $M = SmS \cup SSmSS$. Tani, $MSS = (SmS \cup SSmSS)SS = (SmS)SS \cup (SSmSS)SS \subseteq SmS \cup SSmSS \subseteq M$ dhe $SSM = SS(SmS \cup SSmSS) = SS(SmS) \cup SS(SSmSS) \subseteq SmS \cup SSmSS \subseteq M$. Kjo tregon që M është ideal i djathtë dhe i majtë i S. Kështu M është ideal i S. Tani, na mbetet të tregojmë që M është ideal minimal i S. Le të jetë M' një ideal i S i tillë që $M' \subseteq M$. Meqenëse M' është ideal i S atëherë M' është ideal lateral i S. Meqenëse M është ideal lateral minimal kemi që $M' = M$. Kështu M është ideal minimal i S.

RRJEDHIM 2.23. [22] *Çdo kuazi-ideal minimal i gjysmëgrupit ternar S përmbahet në një ideal minimal të S.*

VËRTETIM. Le të jetë Q një kuazi-ideal i S. Atëherë $Q = R \cap M \cap L$ ku R është ideal i djathtë minimal, M është ideal lateral minimal dhe L është ideal i majtë minimal i S. Është e qartë që $Q \subseteq M$. Atëherë, nga më sipër rrjedh që M është ideal minimal i S.

PËRKUFIZIM 2.24. [22] *Një ideal i dyanshëm [i majtë, i djathtë, lateral, kuazi-ideal] jo-zero I quhet 0-minimal në qoftë se nuk përmban ndonjë ideal të dyanshëm [të majtë, të djathtë, lateral, kuazi-ideal] jo-zero të mirëfilltë në një gjysmëgrup ternar S^0.*

PËRKUFIZIM 2.25. [22] *Një kuazi-ideal Q i gjysmëgrupit ternar S^0 quhet rigorozisht 0-minimal në qoftë se $SSQSS$ është ideal 0-minimal i S^0.*

PËRKUFIZIM 2.26. [22] *Një kuazi-ideal Q i gjysmëgrupit ternar S^0 quhet kanonikal në qoftë se $Q \neq 0$ dhe $Q = R \cap M \cap L$ ku R, L dhe M është ideal i djathtë, i majtë dhe lateral 0-minimal përkatësisht.*

TEOREMË 2.27. [22] *Në qoftë se Q është një kuazi-ideal kanonikal i gjysmëgrupit ternar S^0 atëherë ai është rigorozisht* 0*-minimal.*

VËRTETIM. Le të jetë Q një kuazi-ideal kanonikal i gjysmëgrupit ternar S^0. Atëherë Q$\neq$ 0 dhe $Q = R \cap M \cap L$ ku R, L dhe M janë përkatësisht ideal i djathtë, i majtë dhe lateral 0-minimal të gjysmëgrupit ternar S^0. Kemi që $SS(R \cap M \cap L)SS = (SSR \cap SSM \cap SSL)SS = (SSR)SS \cap S(SMS)S \cap (SSL)SS \subseteq RSS \cap SMS \cap LSS \subseteq R \cap M \cap L$. Meqenëse R, L dhe M janë ideale 0-minimalë, atëherë $R \cap M \cap L$ është një kuazi-ideal 0-minimal dhe nga minimaliteti i $R \cap M \cap L$ kemi që $SS(R \cap M \cap L)SS = R \cap M \cap L$. Kjo tregon që $R \cap M \cap L$ është rigorozisht 0-minimal.

PËRKUFIZIM 2.28. *Një nënbashkësi joboshe Q e gjysmëgrupit ternar S është quajtur pothuajse kuazi-ideal i S në qoftë se* $[QSS \cap (SQS \cup SSQSS) \cap SSQ] \cap Q \neq \emptyset$.

SHEMBULL 2.29. Konsiderojmë gjysmëgrupin Z_4 në lidhje me mbledhjen e zakonshme. Përcaktojmë veprimin ternar * sipas barazimit $\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Atëherë Z_4 në lidhje me veprimin ternar * formon gjysmëgrup ternar. Le të jetë $Q = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Atëherë Qështë pothuajse kuazi-ideal i Z_4.

SHEMBULL 2.30. Konsiderojmë gjysmëgrupin $S = \{a, b, c, d\}$ me tabelën e shumëzimit:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	a
d	a	a	b	b

Le të jetë $Q = \{a, b\}$. Atëherë Q është pothuajse kuazi-ideal i S.

TEOREMË 2.31. *Çdo kuazi-ideal Q i gjysmëgrupit ternar S është pothuajse kuazi-ideal i S.*

VËRTETIM. Supozojmë se është një kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar S. Atëherë $QSS \cap (SQS \cup SSQSS) \cap SSQ \neq \emptyset$ dhe $QSS \cap (SQS \cup SSQSS) \cap SSQ \subseteq Q$. Kështu $[QSS \cap (SQS \cup$

$SSQSS) \cap SSQ] \cap Q = (SQS \cup SSQSS) \cap SSQ \neq \emptyset$. Kjo tregon që Q është pothuajse kuazi-ideal i S.

TEOREMË 2.32. *Le të jetë Q një pothuajse kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar S. Le të jetë Q' një nënbashkësi joboshe e S e tillë që $Q \subset Q' \subseteq S$. Atëherë Q' është pothuajse kuazi-ideal i S.*

VËRTETIM. Le të jetë Q pothujase kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar S. Le të jetë Q' e tillë që $Q \subset Q' \subseteq S$. Atëherë $[QSS \cap (SQS \cup SSQSS) \cap SSQ] \cap Q \subseteq [Q'SS \cap (SQ'S \cup SSQ'SS) \cap SSQ'] \cap Q' \subseteq S$ prandaj$[Q'SS \cap (SQ'S \cup SSQ'SS) \cap SSQ'] \cap Q' \neq \emptyset$. Kjo do të thotë që Q' është pothuajse kuazi-ideal i S.

TEOREMË 2.33. *Bashkimi i dy pothuajse kuazi-idealeve të gjysmëgrupit ternar S është pothuajse kuazi-ideal i S.*

VËRTETIM. Le të jenë Q_1 dhe Q_2 dy pothujase kuazi-ideale të gjysmëgrupit ternar S. Atëherë $[Q_1SS \cap (SQ_1S \cup SSQ_1SS) \cap SSQ_1] \cap Q_1 \neq \emptyset$ dhe $[Q_2SS \cap (SQ_2S \cup SSQ_2SS) \cap SSQ_2] \cap Q_2 \neq \emptyset$. Meqenëse $\emptyset \neq [Q_1SS \cap (SQ_1S \cup SSQ_1SS) \cap SSQ_1] \cap Q_1 \subseteq [(Q_1 \cup Q_2)SS \cap (SS(Q_1 \cup Q_2) \cup SS(Q_1 \cup Q_2)SS) \cap SS(Q_1 \cup Q_2)] \cap (Q_1 \cup Q_2)$. Kështu $[(Q_1 \cup Q_2)SS \cap (SS(Q_1 \cup Q_2) \cup SS(Q_1 \cup Q_2)SS) \cap SS(Q_1 \cup Q_2)] \cap (Q_1 \cup Q_2) \neq \emptyset$. Kjo tregon që $Q_1 \cup Q_2$ është pothujase kuazi-ideal i S.

SHEMBULL 2.34. Konsiderojmë gjysmëgrupin $(Z_5, +)$. Përcaktojmë veprimin ternar * sipas barazimit $\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Atëherë Z_5 në lidhje me veprimin ternar * formon gjysmëgrup ternar. Kemi që $Q_1 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dhe $Q_2 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$ janë pothuajse kuazi-ideale por $Q_1 \cap Q_2 = \{\bar{1}, \bar{4}\}$ nuk është pothuajse kuazi-ideal i Z_5.

VËREJTJE 2.35. Në qoftë se prerja e dy ose më shumë nëngjysmëgrupeve ternare (nënbashkësive) të gjysmëgrupit ternar S është pothuajse kuazi-ideal i S atëherë nëngjysmëgrupet ternare (nënbashkësitë) janë pothuajse kuazi-ideale të S.

POHIM 2.36. *Prodhimi i tre ose më shumë pothuajse kuazi-idealeve të një gjysmëgrupi ternar S në përgjithësi nuk është pothuajse kuazi-ideal i S.*

VËRTETIM. Do të vërtetojmë pohimin në rastin e tre objekteve, shtrirja e më shumë se tre rrjedh nga induksioni. Le të jenë A, B dhe C tre pothuajse kuazi-ideale të S. Atëherë $ABC \subseteq A \cap B \cap C$

por $A \cap B \cap C$ nuk është pothuajse kuazi-ideal i S kështu ABC duke qenë nënbashkësi e $A \cap B \cap C$ nuk është pothuajse kuazi-ideal i S.

POHIM 2.37. *Çdo pothuajse kuazi-ideal i një gjysmëgrupi ternar S është pothuajse ideal i majtë i S.*

VËRTETIM. Supozojmë që Q është pothuajse kuazi-ideal i S. Le të jenë $s_1, s_2 \in S$. Atëherë $\emptyset \neq (s_1 s_2 Q \cap s_1 Q s_2 \cap Q s_1 s_2) \cap Q \subseteq s_1 s_2 Q \cap Q$ prandaj Q është pothuajse ideal i majtë i S.

Në mënyrë të ngjashme, çdo pothuajse kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar S është pothuajse ideal i djathtë i S , çdo pothuajse kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar S është pothuajse ideal lateral i S dhe çdo pothuajse kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar S është pothuajse ideal i S.

LEMË 2.38. *Një gjysmëgrup ternar S nuk ka pothuajse kuazi-ideale të mirëfilltë vetëm atëherë kur për çdo $a \in S$ ekzistojnë $s_a, k_a, t_a, r_a \in S$ të tillë që $s_a k_a (S \backslash \{a\}) \cap [s_a (S \backslash \{a\}) k_a \cup s_a t_a (S \backslash \{a\}) r_a k_a] \cap (S \backslash \{a\}) s_a k_a \subseteq \{a\}$.*

VËRTETIM. Supozojmë që S nuk ka pothuajse kuazi-ideale të mirëfilltë. Atëherë $S \backslash \{a\}$ nuk është pothuajse kuazi-ideal. Atëherë, ekzistojnë $s_a, k_a, t_a, r_a \in S$ të tillë që $(s_a k_a (S \backslash \{a\}) \cap [s_a (S \backslash \{a\}) k_a \cup s_a t_a (S \backslash \{a\}) r_a k_a] \cap (S \backslash \{a\}) s_a k_a) \cap (S \backslash \{a\}) = \emptyset$ prandaj $s_a k_a (S \backslash \{a\}) \cap [s_a (S \backslash \{a\}) k_a \cup s_a t_a (S \backslash \{a\}) r_a k_a] \cap (S \backslash \{a\}) s_a k_a \subseteq \{a\}$.

Anasjelltas, supozojmë që për çdo $a \in S$ ekzistojnë $s_a, k_a, t_a, r_a \in S$ të tillë që $s_a k_a (S \backslash \{a\}) \cap [s_a (S \backslash \{a\}) k_a \cup s_a t_a (S \backslash \{a\}) r_a k_a] \cap (S \backslash \{a\}) s_a k_a \subseteq \{a\}$. Le të jetë $a \in S$. Atëherë $(s_a k_a (S \backslash \{a\}) \cap [s_a (S \backslash \{a\}) k_a \cup s_a t_a (S \backslash \{a\}) r_a k_a] \cap (S \backslash \{a\}) s_a k_a) \cap (S \backslash \{a\}) = \emptyset$. Kështu $S \backslash \{a\}$ nuk është pothuajse kuazi-ideal i S. Le të jetë A një pothuajse kuazi-ideal i mirëfilltë i S. Atëherë $A \subseteq S \backslash \{a\}$ për ndonjë $a \in S$ gjë që është kontradiksion. Kështu S nuk ka pothuajse kuazi-ideale të mirëfilltë.

2.2 BI-IDEALET NË GJYSMËGRUPET TERNARE

Në vijim do të prezantojmë disa çështje të rëndësishme lidhur me bi-idealet në gjysmëgrupet ternare.

PËRKUFIZIM 2.39. [4] *Një nëngjysmëgrup ternar B i gjysmegrupit ternar S quhet bi-ideai S në qoftë se $BSBSB \subseteq B$.*

POHIM 2.40. [23] *Çdo bi-ideal* B *i gjysmëgrupit ternar* S *me zero* 0 *e përmban* 0.

VËRTETIM. Për çdo $a \in B, a0a0a = a0a = 00a = a00 = 0 \in B$ sepse $BSBSB \subseteq B$.

POHIM 2.41. [23] *Çdo ideal i majtë, ideal i djathtë dhe ideal lateral i gjysmëgrupit ternar S është bi-ideal i S.*

VËRTETIM. Le të jetë L një ideal i majtë i S. Atëherë $LSLSL \subseteq (SSS)SL \subseteq SSL \subseteq L$. Në mënyrë të ngjashme, në qoftë se R është ideal i djathtë i S kemi $RSRSR \subseteq RS(SSS) \subseteq RSS \subseteq R$.Gjithashtu kemi që në qoftë se M është ideal lateral i S atëherë $MSMSM \subseteq SSMSS \subseteq SMS \subseteq M$.

POHIM 2.42. [23] *Le të jetë* Q *një kuazi-ideal i gjysmëgrupit ternar* S. *Atëherë* Q *është bi-ideal i* S.

VËRTETIM. QSQSQ $\subseteq$ SSQ ∩ SSQSS ∩ QSS $\subseteq$ Q. Kjo tregon që Q është bi-ideal i S.

SHËNIM 2.43. [23] E anasjellta në përgjithësi nuk është e vërtetë, dmth, një bi-ideal i gjysmëgrupit ternar S mund të mos jetë kuazi-ideal of S.

VËREJTJE 2.44. [23] Meqenëse çdo ideal i majtë, i djathtë dhe lateral i S është kuazi-ideal i S rrjedh që çdo ideal i majtë, i djathtë dhe lateral i S është bi-ideal i S. E anasjellta në poërgjithësi nuk është e vërtetë.

POHIM 2.45. [23] *Prerja e dy kuazi-idealeve Q_1 dhe Q_2 të gjysmëgrupit ternar S është bi-ideal i S.*

VËRTETIM. Nga Pohimi 3.3 ne kemi që $Q_1SQ_1SQ_1 \subseteq Q_1$ dhe $Q_2SQ_2SQ_2 \subseteq Q_2$. Kështu $(Q_1 \cap Q_2)S(Q_1 \cap Q_2)S(Q_1 \cap Q_2) \subseteq Q_1SQ_1SQ_1 \subseteq Q_1$ dhe $(Q_1 \cap Q_2)S(Q_1 \cap Q_2)S(Q_1 \cap Q_2) \subseteq Q_2SQ_2SQ_2 \subseteq Q_2$. Kjo do të thotë që $(Q_1 \cap Q_2)S(Q_1 \cap Q_2)S(Q_1 \cap Q_2) \subseteq Q_1 \cap Q_2$. Që këtej rrjedh që $Q_1 \cap Q_2$ është bi-ideal i S.

POHIM 2.46. [23] *Prerja e çdo bashkësie bi-idealesh të gjysmëgrupit ternar S ose është boshe ose është bi-ideal i S.*

VËRTETIM. Le të jetë $(B_i)_{i\in I}$ një bashkësi çfarëdo jo-boshe bi-idealesh të S. Atëherë $(\bigcap_{i\in I} B_i)S(\bigcap_{i\in I} B_i)\, S(\bigcap_{i\in I} B_i)\subseteq B_iSB_iSB_i\subseteq B_i$,përçdo$i \in I$.Kështu
$(\bigcap_{i\in I} B_i)S(\bigcap_{i\in I} B_i)\, S(\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$ gjë që tregon që $\bigcap_{i\in I} B_i$ është bi-ideal i S.

POHIM 2.47. [23] *Prerja e çdo bashkësie bi-idealesh të gjysmëgrupit ternar* S *me zero* 0 *është bi-ideal i* S.

VËRTETIM. Le të jetë $(B_i)_{i\in I}$ një bashkësi çfarëdo bi-idealesh të S. Meqënëse $0 \in B_i$ për çdo $i \in I$ kemi që $0 \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Kështu $\bigcap_{i\in I} B_i \neq \emptyset$. Më tej vërtetimi mund të vazhdohet njësoj si tek Pohimi 2.46.

POHIM 2.48. [23] *Në qoftë se B është një bi-ideal i gjysmëgrupit ternar S dhe T është një nëngjysmëgrup ternar i S, atëherë $B \cap T$ është bi-ideal i T.*

VËRTETIM. $(B\cap T)T(B\cap T)T(B\cap T) \subseteq BTBTB \subseteq BSBSB \subseteq B$ dhe $(B\cap T)T(B\cap T)T(B\cap T) \subseteq TTTTT \subseteq TTT \subseteq T$. Këto përfshierje sjellin që $(B\cap T)T(B\cap T)T(B\cap T) \subseteq B\cap T$. Kështu $B\cap T$ është bi-ideal i T.

LEMË 2.49. [23] *Në qoftë se B është një bi-ideal i gjysmëgrupit ternar S dhe T_1, T_2 janë dy nëngjysmëgrupe ternare të S, atëherë BT_1T_2, T_1BT_2 dhe T_1T_2B janë bi-ideale të S.*

VËRTETIM. $(BT_1T_2)S(BT_1T_2)S(BT_1T_2) = B(T_1T_2S)B(T_1T_2S)BT_1T_2 \subseteq BSBSBT_1T_2 \subseteq BT_1T_2$. Kjo tregon që BT_1T_2 është bi-ideal i S. Gjithashtu kemi që $(T_1BT_2)S(T_1BT_2)S(T_1BT_2) = T_1B(T_2ST_1)B(T_2ST_1)BT_2 \subseteq T_1BSBSBT_2 \subseteq T_1BT_2$. Kjo sjell që T_1BT_2 është bi-ideal i S. Së fundi, kemi $(T_1T_2B)S(T_1T_2B)S(T_1T_2B) = T_1T_2B(ST_1T_2)B(ST_1T_2)B \subseteq T_1T_2BSBSB \subseteq T_1T_2B$. Kjo do të thotë që T_1T_2B është bi-ideal i S.

RRJEDHIM 2.50. [23] *Në qoftë se B_1, B_2 dhe B_3 janë tre bi-ideale të gjysmëgrupit ternar S, atëherë $B_1B_2B_3$ është bi-ideal i S*

VËRTETIM.$(B_1B_2B_3)S(B_1B_2B_3)S(B_1B_2B_3) =$ $B_1B_2B_3(SB_1B_2)B_3(SB_1B_2)B_3 \subseteq B_1B_2B_3SB_3SB_3 \subseteq B_1B_2B_3$. Kjo tregon që $B_1B_2B_3$ është bi-ideal i S.

RRJEDHIM 2.51. [23] *Në qoftë se Q_1, Q_2 dhe Q_3 janë tre kuazi-ideale të gjysmëgrupit ternar S, atëherë $Q_1Q_2Q_3$ është bi-ideal i S.*

VËRTETIM. Kjo rrjedh nga Teorema 2.18 dhe Pohimi 2.42.

Në përgjithësi, në qoftë se B është një bi-ideal i gjysmëgrupit ternar S dhe T është një bi-ideal i B, atëherë T nuk është bi-ideal i S. Në veçanti, kemi rezultatin që vijon.

TEOREMË 2.52. [23] *Le të jetë B një bi-ideal i gjysmëgrupit ternar S dhe T një bi-ideal i B i tillë që $T^3 = T$. Atëherë T është bi-ideal i S.*

VËRTETIM. Meqenëse B është një bi-ideal i S kemi $BSBSB \subseteq B$ dhe meqenëse T është bi-ideal iBkemiqë$TBTBT \subseteq T$.Prandaj$TSTST = (TTT)STS(TTT) =$ $TT(TSTST)TT \subseteq TT(BSBSB)TT \subseteq TTBTT = TTBT(TTT) \subseteq T(TBTBT)T \subseteq TTT = T$.

POHIM 2.53. [23] *Le të jenë A, B dhe C tre nëngjysmëgrupe ternare të gjysmëgrupit ternar S dhe $T = ABC$. Atëherë, T është bi-ideal në qoftë se të paktën njëri nga A, B ose C është ideal i djathtë, lateral ose i majtë i S.*

VËRTETIM. Le të jetë $T = ABC$ dhe A një ideal i djathtë i S. Atëherë $(ABC)S(ABC)S(ABC) =$ $A(SSS)(SSS)SSBC \subseteq A(SSS)SBC \subseteq (ASS)BC \subseteq ABC$. Prandaj $T = ABC$ është bi-ideal i S. le të jetë tani B një ideal i djathtë i S. Atëherë $(ABC)S(ABC)S(ABC) \subseteq AB(SSS)(SSS)SSC \subseteq$ $AB(SSS)SC \subseteq ABSSC \subseteq ABC$. Kjo tregon që $T = ABC$ është bi-ideal i S. Së fundi, le të jetë C një idealidjathtëiS.Atëherëkemi

$$(ABC)S(ABC)S(ABC) \subseteq ABC(SSS)(SSS)SS \subseteq ABC(SSS)S \subseteq ABCSS \subseteq ABC.$$

Që nga $T = ABC$ është bi-ideal i S. Në mënyrë të ngjashme provohen dy rastet e tjera.

POHIM 2.54. [23] *Le të jetë T një ideal [ideal i majtë , ideal lateral, ideal i djathtë , quazi-ideal ose bi-ideal] i gjysmëgrupit ternar S. Në qoftë se Y është një nëngjysmëgrup ternar i S i tillë që $SST \cup STS \cup TSS \subseteq Y \subseteq T$ [$SST \subseteq Y \subseteq T$,$STS \subseteq Y \subseteq T$,$TSS \subseteq Y \subseteq T$,$SST \cap (STS \cup SSTSS) \cap$*

$TSS \subseteq Y \subseteq T$ *or* $TSTST \subseteq Y \subseteq T$ *] atëherë* Y *është ideal [ideal i majtë , ideal lateral, ideal i djathtë , quazi-ideal ose bi-ideal] i* S.

VËRTETIM. $SSY \subseteq SST \subseteq SST \cup STS \cup TSS \subseteq Y$, $SYS \subseteq STS \subseteq SST \cup STS \cup TSS \subseteq Y$ dhe $YSS \subseteq TSS \subseteq SST \cup STS \cup TSS \subseteq Y$ [$SSY \subseteq SST \subseteq Y, SYS \subseteq STS \subseteq Y, YSS \subseteq TSS \subseteq Y, SSY \cap (SYS \cup SSYSS) \cap YSS \subseteq SST \cap (STS \cup SSTSS) \cap TSS \subseteq Y$ ose $YSYSY \subseteq TSTST \subseteq Y$].

TEOREMË 2.55. [23] *Në qoftë se* S *është një gjysmëgrup ternar i rregullt atëherë* $BSBSB = B$ *për çdo bi-ideal* B *të* S.

VËRTETIM. Le të jetë S një gjysmëgrup ternar i rregullt dhe B një bi-ideal i S. Atëherë, është evidente që $BSBSB \subseteq B$. Le të jetë $a \in B$. Meqenëse S është i rregullt kemi që ekzistojnë $x, y \in S$ të tillë që $a = axaya$. Kjo implikon që $a \in BSBSB$ që nga $B \subseteq BSBSB$.

TEOREMË 2.56. [23] *Le të jetë* S *një gjysmëgrup ternar i rregullt dhe* B *një bi-ideal i* S. *Atëherë* $BSB \subseteq B$.

VËRTETIM. Le të jetë $a \in BSB$. Meqenëse S është i rregullt kemi që ekzistojnë $x, y \in S$ të tillë që $a = axaya$. Gjithashtu kemi që $a = b_1 s b_2$ ku $b_1, b_2 \in B$ dhe $s \in S$. Kështu $a = (b_1 s b_2)x(b_1 s b_2)y(b_1 s b_2) = (b_1 s b_2 x b_1)(s b_2 y) b_1 s b_2 \subseteq B(SSS)BSB \subseteq BSBSB \subseteq B$. Kjo tregon që $BSB \subseteq B$.

TEOREMË 2.57. [23] *Le të jetë* S *një gjysmëgrup ternar i rregullt dhe* B *një bi-ideal i* S. *Atëherë* B *është kuazi-ideal i* S.

VËRTETIM. $BSS \cap (SBS \cup SSBSS) \cap SSB = BSS(SBS \cup SSBSS)SSB = B(SSS)B(SSS)B \cup B(SSS)SB(SSS)SB \subseteq BSBSB \cup BSSBSSB \subseteq B \cup BSB \subseteq B \cup B = B$.

TEOREMË 2.58. [23] *Në qoftë se* Q_1, Q_2 *janë dy nëngjysmëgrupe ternare dhe* Q_3 *është një bi-ideal i gjysmëgrupit ternar* S *atëherë* $Q_1 Q_2 Q_3, Q_1 Q_3 Q_2$ *dhe* $Q_3 Q_1 Q_2$ *janë kuazi-ideale të* S.

TEOREMË 2.59. [23] *Në qoftë se gjysmëgrupi ternar* S *është i rregullt atëherë* $B_g(a) = aSaSa$ *për çdo element* a *të* S *(* $B_g(a)$ *është bi-ideali më i vogël i* S *që përmban* a*).*

VËRTETIM.$B_g(a)SB_g(a)SB_g(a) = (aSaSa)S(aSaSa)S(aSaSa) =$ $a(SaS)SaS(aSa)(SaS)a \subseteq aSSSaSSSa \subseteq aSaSa = B_g(a)$. Për rrjedhojë $B_g(a)$ është bi-ideal i S. Meqenëse S është i rregullt, ekzistojnë $x, y \in S, a = axaya \in aSaSa = B_g(a)$. Le të jetë T një bi-ideal i S i tillë që $a \in T$. Atëherë $B_g(a) = aSaSa \subseteq TSTST \subseteq T$.

POHIM 2.60. [23] *Le të jetë R, M dhe L një ideal i djathtë, lateral dhe i majtë, respektivisht, i gjysmëgrupit ternar S. Atëherë, çdo nëngjysmëgrup ternar B i S i tillëq ë $RML \subseteq B \subseteq R \cap M \cap L$ është bi-ideal i S.*

VËRTETIM. $BSBSB \subseteq (R \cap M \cap L)S(R \cap M \cap L)S(R \cap M \cap L) \subseteq RSMSL \subseteq RML \subseteq B$ kështu që B është bi-ideal.

POHIM 2.61. [23] *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar dhe B një bi-ideal i S. Në qoftë se elementët e B janë të rregullt, atëherë B është kuazi-ideal i S.*

VËRTETIM. Në qoftë se $s_1s_2b_1 = s_3b_2s_4 = b_3s_5s_6 \in SSB \cap SBS \cap BSS$ atëherë gjenden $x, y \in S$ të tillë që $b_1xb_1yb_1 = b_1$. Kështu $s_1s_2b_1 = s_1s_2(b_1xb_1yb_1) = (s_1s_2b_1)xb_1yb_1 = (b_3s_5s_6)xb_1yb_1 = b_3(s_5s_6x)b_1yb_1 \in B(SSS)BSB \subseteq BSBSB \subseteq B$. Kjo tregon që $SSB \cap SBS \cap BSS \subseteq B$. Në mënyrë të ngjashme tregohet që $SSB \cap SSBSS \cap BSS \subseteq B$ që nga $SSB \cap (SBS \cup SSBSS) \cap BSS \subseteq B$ dhe kështu B është kuazi-ideal i S .

PËRKUFIZIM 2.62. ***Një** bi-ideal U i gjysmëgrupit ternar$S$ është bi-ideal minimal në qoftë se nuk ekziston një bi-ideal T i tillë që $T \subset U$ (Ne përdorim $\subset$ për përfshierjen e mirëfilltë.)*

PËRKUFIZIM 2.63. [23] *Një bi-ideal jo-zero U i gjysmëgrupit ternar $S = S^0$ është bi-ideal minimal në qoftë se nuk ekziston asnjë bi-ideal T i tillë që $\{0\} \subset T \subset U$ (Përdoret simboli $\subset$ për përfshierjen e mirëfilltë).*

PËRKUFIZIM 2.64. [23] *Një bi-ideal B i gjysmëgrupit ternar $S = S^0$ quhet nilpotent në qoftë se ekziston një numër i plotë pozitiv tek $n \geq 3$ i tillë që $B^n = \{0\}$.*

POHIM 2.65. [23] *Le të jetë B një bi-ideal i gjysmëgrupit ternar $S = S^0$. Atëherë B është nilpotent në qoftë se dhe vetem në qoftë se $B^3 = \{0\}$.*

VËRTETIM. Le të jetë $n \geq 3$ një numër i.plotë pozitiv tek. Atëherë, meqenëse prodhimi i tre bi-idealeve është bi-ideal, B^{n-2} është bi-ideal i cili përfshihet qartësisht në B dhe kemi $B^{n-2} = B$ në qoftë se $B^{n-2} \neq \{0\}$. Kështu $B^n = B^3 = \{0\}$ pikërisht kur B është nilpotent.

PËRKUFIZIM 2.66. [23] *Bi-ideali B i gjysmëgrupit ternar $S = S^0$ quhet bi-ideal nilpotent minimal në qoftë se B është zero nëngjysmëgrup ternar i S dmth $B^3 = \{0\}$.*

TEOREMË 2.67. [23] *Le të jetë B një bi-ideal nilpotent minimal i gjysmëgrupit ternar $S = S^0$. Atëherë. pohimet që vijojnë janë ekuivalente:*

1. ndonjë element jo-zero i B nuk është i rregullt

2. asnjë elemnt jo-zero i B nuk është i rregullt

3. për ndonjë $b \in B \backslash \{0\}, bSbSb = \{0\}$

4. për çdo $b \in B, bSbSb = \{0\}$

(në secilin nga rastet më sipër $B = \{b, 0\}$;

5. çdo element në B është i rregullt

6. ndonjë element jo-zero i B është i rregullt

7. $bSbSb \neq \{0\}$ për çdo $b \in B \backslash \{0\}$

8. $bSbSb \neq \{0\}$ për ndonjë $b \in B$

(në secilin nga keto raste B është kuazi-ideal).

VËRTETIM. Në secilin nga rastet e mësipërm duhet konsideruar vetëm $bSbSb$ për $b \in B$. Vëmë re që $bSbSb$ është bi-ideal që përmbahet në B. Kështu, nga minimaliteti i B ose $bSbSb = \{0\}$ ose $bSbSb = B$. Në rastet 1 ose 2 në qoftë se b nuk është i rregullt, atëherë $bSbSb \subset B$ dhe kështu $bSbSb = \{0\}$. Prandaj është e qartë që $\{b, 0\}$ është bi-ideal dhe kështu $B = \{b, 0\}$. Kështu, ekuivalenca e pohimeve $1 - 4$ janë evidente.

Me të vërtetë, tani është e qartë që një element jo-zero i B mund të jetë i rregullt vetëm kur çdo element në B është i rregullt . Për më tepër $b \neq 0$ është i rregullt në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $bSbSb \neq \{0\}$ duke qenë se në një rast të tillë $bSbSb = B$. Që këtej rrjedh që secili nga pohimet $5 - 8$ janë ekuivalente dhe në secilin rast B është kuazi-ideal.

PËRKUFIZIM 2.68. [23] *Për* $a, b \in S$ *ku* S *është një gjysmëgrup ternar i dhënë përcaktojmë* $a\mathcal{B}b$ *në qoftë se* 1) $a = b$ *ose* 2) *ekzistojnë* $u, v, w, z \in S$ *të tillë që* $auava = b$ *dhe* $bwbzb = a$.

POHIM 2.69. [23] *Relacioni* $\mathcal{B}$ *i përcaktuar është një relacion ekuivalence.*

POHIM 2.70. [23] *Në qoftë se A është një bi-ideal i gjysmëgrupit ternar S atëherë* $A = \bigcup_{a \in A} B_a$, *dmth, çdo bi-ideal është bashkim i* $\mathcal{B}$ *−klasave të tij.*

POHIM 2.71. [23] *Le të jetë* S *një gjysmëgrup ternar me zero* 0. *Në qoftë se bi-ideali* B *është bashkim* $\mathcal{B}$ *−klasash jo-zero, atëherë ai është bi-ideal 0-minimal.*

E anasjellta e këtij pohimi është gjithashtu e vërtetë sin në vijim:

TEOREMË 2.72. [23] *Le të jetë* S *një gjysmëgrup ternar me zero* 0. *Një bi-ideal* B *është* 0 *−minimal vetëm atëherë kur ai është bashkim* $\mathcal{B}$ *−klasash jo-zero.*

VËRTETIM. Le të jetë B një bi-ideal 0 −minimal i $S = S^0$. Le të jenë $a, b \in B \backslash \{0\}$. Meqenëse $\{b, b^3\} \cup bSbSb$ dhe $\{a, a^3\} \cup aSaSa$ janë qartësisht bi-ideale jo-zero që përmbahen në B ne duhet të kemi $B = \{b, b^3\} \cup bSbSb = \{a, a^3\} \cup aSaSa$.

Tani, supozojmë se $a \neq b$. Ne mund të procedojmë nga barazimi i fundit duke dalluar rastet:

Supozojmë se $a = b^3$. Ne kemi dy nën-raste për të konsideruar.

1)Në qoftë se gjithashtu $b = a^3$ atëherë $a = b^3 = aa^3aa^3a = b^3a^3b^3a^3b^3 = b(bba^3)b(bba^3bb)b$ dhe gjithashtu $b = a^3 = a(aab^3)a(aab^3aa)a$. Që këtej rrjedh që $a\mathcal{B}b$.

2) Në qoftë se $b \neq a^3$ne duhet të kemi $b \in aSaSa$ dhe $b = auava$ për ndonjë $u, v \in S$. Atëherë $a = b^3 = (auava)(auava)(auava) = b(bbuavaaub)b(bvaauavbb)b$. Përsëri rrjedh që $a\mathcal{B}b$.

Tani, në qoftë se $a \neq b$ and $a \neq b^3$ ne duhet të kemi $a \in bSbSb$ kështu që $a = bëbzb$ për ndonjë $ë, z \in S$. Përsëri për b dallojmë rastet si më sipër. Në qoftë se $b = a^3$ ne kemi thjesht rastin 2) me rolet e a dhe të b të këmbyer. Në qoftë se $b \in aSaSa$ atëherë $b = auava$ për ndonjë $u, v \in S$. Në secilin rast rrjedh që $a\mathcal{B}b$ që nga ne mund të konkludojmë që $B = B_b \cup \{0\}$. E anasjellta është thjesht Pohimi 2.71.

POHIM 2.73. [23] *Le të jetë* S *një gjysmëgrup ternar me* 0. *Në qoftë se* R *është një ideal i djathtë* $0-$*minimal* , M *është një ideal lateral* $0-$*minimal dhe* L *është një ideal i majtë* $0-$*minimal, atëherë ose* $RML = \{0\}$ *ose* RML *është një bi-ideal* $0-$*minimal i* S.

VËRTETIM. Supozojmë se $\mathrm{RML} \neq \{0\}$ dhe që ekziston një bi-ideal B me $\{0\} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{RML}$. Meqenëse $\mathrm{RML} \subseteq \mathrm{R} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{L}$ ne kemi që $\mathrm{BSS} \subset (\mathrm{RML})\mathrm{SS} \subseteq (\mathrm{R} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{L})\mathrm{SS} \subseteq \mathrm{RSS} \subseteq \mathrm{R}$. Kështu, nga minimaliteti i R ne kemi $\mathrm{BSS} = \mathrm{R}$. Ne kemi gjithashtu që $\mathrm{SBS} \subset \mathrm{S}(\mathrm{RML})\mathrm{S} \subseteq \mathrm{S}(\mathrm{R} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{L})\mathrm{S} \subseteq \mathrm{SMS} \subseteq \mathrm{M}$. Nga minimaliteti i M rrjedh që $\mathrm{SBS} = \mathrm{M}$. Për më tepër, ne kemi $\mathrm{SSB} \subset \mathrm{SS}(\mathrm{RML}) \subseteq \mathrm{SS}(\mathrm{R} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{L}) \subseteq \mathrm{SSL} \subseteq \mathrm{L}$ dhe duke qenë se L është minimal kemi që $\mathrm{SSB} = \mathrm{L}$. Kështu $\mathrm{B} \subset \mathrm{RML} = (\mathrm{BSS})(\mathrm{SBS})(\mathrm{SSB}) = \mathrm{B}(\mathrm{SSS})\mathrm{B}(\mathrm{SSS})\mathrm{B} \subseteq \mathrm{BSBSB} \subseteq \mathrm{B}$ gjë që është një kontradiksion që nga RML është bi-ideal $0-$minimal.

POHIM 2.74. [23] *Le të jetë* S *një gjysmëgrup ternar me* 0. *Në qoftë se* B *është një bi-ideal* $0-$*minimal i* S *atëherë për çdo ideal të djathtë* R *që përmbahet në* BSS, *çdo idela lateral* M *që përmbahet në* SBS *dhe çdo ideal të majtë* L *që përmabhet në* SSB *ne kemi që ose* $RML = \{0\}$ *ose* $RML = B$.

VËRTETIM. Let të jetë $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{BSS}, \mathrm{M} \subseteq \mathrm{SBS}$ dhe $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{SSB}$. Atëherë $\mathrm{RML} \subseteq (\mathrm{BSS})(\mathrm{SBS})(\mathrm{SSB}) = \mathrm{B}(\mathrm{SSS})\mathrm{B}(\mathrm{SSS})\mathrm{B} \subseteq \mathrm{BSBSB} \subseteq \mathrm{B}$. Meqenëse RML është një bi-ideal dhe B është $0-$minimal rrjedh që $\mathrm{RML} = \{0\}$ ose $\mathrm{RML} = \mathrm{B}$.

POHIM 2.75. [23] *Le të jetë* S *një gjysmëgrup ternar*. *Në qoftë se* B *është një bi-ideal minimal i* S *atëherë* BSS, SBS *dhe* SSB *janë ideale të majtë, të djathtë dhe laterlë minimalë të* S *respektivisht dhe* $B = (BSS)(SBS)(SSB)$, *domethënë* B *është një produkt i një ideali të djathtë minimal, ideali lateral minimal dhe ideali të majtë minimal.*

VËRTETIM. Le të jetë R një ideal i djathtë , M një ideal lateral dhe L një ideal i majtë i S me $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{BSS}, \mathrm{M} \subseteq \mathrm{SBS}$ dhe $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{SSB}$. Meqenëse RML është një bi-ideal me $\mathrm{RML} \subseteq \mathrm{BSSSBSSSB} \subseteq \mathrm{BSBSB} \subseteq \mathrm{B}$ ne duhet të kemi $\mathrm{B} = \mathrm{RML}$. Por $\mathrm{RML} \subseteq \mathrm{R} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{L}$ dhe kështu $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{R}$. Prandaj ne kemi $\mathrm{BSS} \subseteq \mathrm{RSS} \subseteq \mathrm{R}$ kështu që $\mathrm{R} = \mathrm{BSS}$. Për më tepër, BSS është një ideal i djathtë minimal . Në mënyrë të ngjashme SSB është një ideal i majtë minimal . Tani $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{M}$ implikon $\mathrm{SBS} \subseteq \mathrm{SMS} \subseteq \mathrm{M}$. Kështu $\mathrm{SBS} = \mathrm{M}$.Që këtej rrjedh që SBS është një ideal lateral minimal.

Meqenëse B është një bi-ideal minimal i cili përmban $(\mathrm{BSS})(\mathrm{SBS})(\mathrm{SSB})$ që në vetvete është një bi-ideal kemi që $\mathrm{B} = (\mathrm{BSS})(\mathrm{SBS})(\mathrm{SSB})$.

PËRKUFIZIM 2.76. *Një nënbashkësi joboshe B e gjysmëgrupit ternar S është quajtur pothuajse bi-ideal i S në qoftë se $BxByB \cap B \neq \emptyset$, për çdo $x, y \in S$.*

SHEMBULL 2.77. Konsiderojmë gjysmëgrupin Z_3 në lidhje me mbledhjen e zakonshme. Përcaktojmë veprimin ternar * sipas barazimit $\bar{a} * \bar{b} * \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Atëherë Z_3 në lidhje me veprimin ternar * formon gjysmëgrup ternar. Le të jetë $B = \{\bar{1}, \bar{2}\}$. Atëherë B është pothuajse bi-ideal i Z_3.

SHEMBULL 2.78. Konsiderojmë gjysmëgrupin $S = \{e, a, b, c\}$ me tabelën e shumëzimit:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Le të jetë $B = \{e, a\}$. Atëherë B është pothuajse bi-ideal i S.

POHIM 2.79. *Çdo bi-ideal i gjysmëgrupit ternar S është pothuajse bi-ideal i S.*

VËRTETIM. Supozojmë që B është një bi-ideal i gjysmëgrupit ternar S. Atëherë $BxByB \neq \emptyset$ dhe $BxByB \subseteq BSBSB \subseteq B$, për çdo $x, y \in S$. Kështu $BxByB \cap B = BxByB \neq \emptyset$ prandaj B është pothuajse bi-ideal i S.

POHIM 2.80. *Le të jetë B pothuajse bi-ideal i gjysmëgrupit ternar S. Le të jetë B' një nënbashkësi joboshe e S e tillë që $B \subseteq B' \subseteq S$. Atëherë B' është pothuajse bi-ideal i S.*

VËRTETIM. Le të jetë B pothuajse bi-ideal i gjysmëgrupit ternar S i tillë që $B \subseteq B' \subseteq S$. Atëherë $\emptyset \neq BxByB \cap B \subseteq B'xB'yB' \cap B'$ për çdo $x, y \in S$. Kështu B' është pothuajse bi-ideal i S.

POHIM 2.81. *Bashkimi i pothuasje dy bi-idealeve të gjysmëgrupit ternar S është pothuajse bi-ideal i S.*

VËRTETIM. Le të jenë B_1 dhe B_2 dy pothuajse bi-ideale të gjysmëgrupit ternar S. Meqenëse $B_1 \subseteq B_1 \cup B_2$ atëherë nga Pohimi 2.8 kemi që $B_1 \cup B_2$ është pothuajse bi-ideal i S.

VËREJTJE 2.82. Në qoftë se prerja e dy ose më shumë nëngjysmëgrupeve ternare (nënbashkësive) të gjysmëgrupit ternar S është pothuajse bi-ideal i S atëherë nëngjysmëgrupet ternare (nënbashkësitë) janë pothuajse bi-ideale të S.

POHIM 2.83. *Prodhimi i tre ose më shumë pothuajse bi-idealeve të një gjysmëgrupi ternar S në përgjithësi nuk është pothuajse bi-ideal i S.*

VËRTETIM. Do të vërtetojmë pohimin në rastin e tre objekteve, shtrirja e më shumë se tre rrjedh nga induksioni. Le të jenë A, B dhe C tre pothuajse bi-ideale të S. Atëherë $ABC \subseteq A \cap B \cap C$ por $A \cap B \cap C$ nuk është pothuajse bi-ideal i S kështu ABC duke qenë nënbashkësi e $A \cap B \cap C$ nuk është pothuajse bi-ideal i S.

KAPITULLI 3

DISA KARAKTERIZIME TË $\Gamma-$GJYSMËGRUPEVE TERNARE

Në këtë kapitull do paraqesim disa karakterizime të Γ-gjysmëgrupeve ternare nëpërmjet nënstrukturave të tyre të cilat zbulojnë disa veti të rëndësishme të këtyre strukturave.

3.1 KONCEPTE HYRËSE

Le të paraqesim disa koncepte elementare në $\Gamma-$gjysmëgrupet ternare.

PËRKUFIZIM 3.0. [7] *$\Gamma-$gjysmëgrup ternar quhet treshja e radhitur (M, $_M(\cdot)_\Gamma$, $_\Gamma(\cdot)_M$) ku M dhe Γ janë dy bashkësi joboshe, $_M(\cdot)_\Gamma$ shumëzim në M nëpërmjet elementëve të bashkësisë Γ, $_\Gamma(\cdot)_M$ shumëzim në Γ nëpërmjet elementëve të M, e tillë që:*

$\forall a,b,c,d,e \in M$ *dhe* $\forall \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Gamma$, $(a\alpha b\beta c)\gamma d\delta e = a\alpha(b\beta c\gamma d)\delta e = a\alpha b\beta(c\gamma d\delta e)$

SHEMBULL 3.1. Le të jenë A dhe B dy bashkësi. Bashkësia e pasqyrimeve të A në B formon $\Gamma-$ gjysmëgrup ternar në qoftë se si Γ marrim bashkësinë e pasqyrimeve të B në A në lidhje me shumëzimin në M nëpërmjet elementëve të Γ dhe shumëzimin në Γ nëpërmjet elementëve të M që përcaktohen përkatësisht me në të kompozimeve të zakonshme $f_1 \, o \, \alpha \, o \, f_2 \, o \, \beta \, o \, f_3$ dhe $\gamma \, o \, g_1 \, o \, \delta \, o \, g_2 \, o \, \lambda$, për çdo pasqyrim f_1, f_2, f_3, g_1, g_2 të bashkësisë A në bashkësinë B dhe çdo pasqyrim $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ të bashkësisë B në bashkësinë A, në sajë të vetisë së shoqërimit që ka komp;ozimi i pasqyrimeve.

SHEMBULL 3.2. Le të jetë M bashkësia e numrave natyrorë të trajtës $4n+3$ dhe Γ bashkësia e numrave natyrorë të trajtës $4n+1$. Përcaktojmë shumëzimin në M nëpërmjet elementëve të Γ me anë të barazimit $a\alpha b\beta c = a+\alpha+b+\beta+c$ dhe shumëzimin në Γ nëpërmjet elementëve të M me anë të barazimit $\gamma a\delta b\lambda = \gamma+a+\delta+b+\lambda$. Meqë mbledhja e zakonshme e numrave natyrorë e ka vetinë e shoqërimit, treshja e radhitur (M, $_M(\cdot)_\Gamma$, $_\Gamma(\cdot)_M$) është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar.

PËRKUFIZIM 3.3. *$\Gamma-$gjysmëgrup ternar quhet çifti i radhitur (S, $_S(\cdot)_\Gamma$) ku S dhe Γ janë dy bashkësi joboshe dhe $_S(\cdot)_\Gamma$ është shumëzim në S nëpërmjet elementëve të Γ, i tillë që*

$\forall a, b, c, d, e \in S$ *dhe* $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$, $(a\alpha b\beta c)\gamma d\delta e = a\alpha b\beta(c\gamma d\delta e)$

Le të jenë $M = \{a, b, c, \dots\}$ dhe $\Gamma = \{x, y, z, \dots\}$ dy bashkësi joboshe. M quhet $\Gamma-$gjysmëgrup ternar në qoftë se

(1) $axbyc \in M$

(2) $(axbyc)zdwe = axby(czdwe)$

për çdo $a, b, c, d, e \in M$ dhe për çdo $x, y, z, w \in \Gamma$.

SHEMBULL 3.4. Le të jetë $(S, \cdot)$ një gjysmëgrup ternar dhe Γ një bashkësi çfarëdo. Përcaktojmë në S shumëzimin nëpërmjet elementëve të Γ, ${}_S(\cdot)_\Gamma$, me anë të prodhimit të elementëve të gjysmëgrupit ternar $(S, \cdot)$, $a\alpha b\beta c = a \cdot b \cdot c$. Meqë shumëzimi i gjysmëgrupit ternar $(S, \cdot)$ka vetinë e shoqërimit kemi

$$a\alpha b\beta(c\gamma d\delta e) = a\alpha b\beta(cde) = ab(cde) = (abc)de = (abc)\gamma d\delta e = (a\alpha b\beta c)\gamma d\delta e.$$

Pra, çifti i radhitur (S, ${}_S(\cdot)_\Gamma$) është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar. Kështu, meqë nga çdo gjysmëgrup ternar S kemi natyrshëm një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar themi (me mirëkuptim) se çdo gjysmëgrup ternar është një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar dhe rrjedhimisht $\Gamma-$gjysmëgrupet ternare mund ti konsiderojmë si përgjithësime të gjysmëgrupeve ternare.

SHEMBULL 3.5. Le të jetë $S = [0, 1]$ dhe $\Gamma = \left\{\frac{1}{n} \,/\, n \in N\right\}$. Përcaktojmë në S shumëzimin nëpërmjet elementëve të Γ, (S, ${}_S(\cdot)_\Gamma$), me anë të prodhimit të zakonshëm, domethënë për çdo tre numra realë a, b, c të segmentit $[0, 1]$ dhe çdo thyesë $\alpha = \frac{1}{m}, \beta = \frac{1}{n}$ kemi $a\alpha b\beta c = a \cdot \frac{1}{m} \cdot b \cdot \frac{1}{n} \cdot c = \frac{abc}{mn}$. Çifti i radhitur (S, ${}_S(\cdot)_\Gamma$) është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar, meqë shumëzimi i zaakonshëm e ka vetinë e shoqërimit.

Për $\Gamma-$gjymsëgrupet ternare, ashtu si dhe për gjysmëgrupet ternare, jepet koncepti i $\Gamma-$nëngjysmëgrupit ternar.

PËRKUFIZIM 3.6. *Nënbashkësia joboshe S_1 e bashkësisë S quhet $\Gamma-$nëngjysmëgrup ternar i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar (S, ${}_S(\cdot)_\Gamma$) në qoftë se $(S_1, {}_{S_1}(\cdot)_\Gamma)$ është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar.*

Le të jenë A dhe B dy nënbashkësi joboshe të $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S. Në këtë rast shënimi $A\Gamma B\Gamma C$ përdoret për të treguar bashkësinë e të gjitha elementëve të S që kanë trajtën $a\alpha b\beta c$ ku $a \in A, b \in B, c \in C$ dhe $\alpha, \beta \in \Gamma$. Në qoftë se $A = \{a\}, B = \{b\}$ ose $C = \{c\}$ atëherë për thjeshtësi nëvendtëshënimeve

$\{a\}\Gamma B\Gamma C, A\Gamma\{b\}\Gamma C, A\Gamma B\Gamma\{c\}, \{a\}\Gamma\{b\}\Gamma C, \{a\}\Gamma B\Gamma\{c\}, A\Gamma\{b\}\Gamma\{c\}, \{a\}\Gamma\{b\}\Gamma\{c\}$ do të përdorim shënimet $a\Gamma B\Gamma C, A\Gamma b\Gamma C, A\Gamma B\Gamma c, a\Gamma b\Gamma C, a\Gamma B\Gamma c, A\Gamma b\Gamma c, a\Gamma b\Gamma c$.

Kështu, $\Gamma-$nëngjysmëgrup ternar i $\Gamma-$ gjysmëgrupit ternar S është çdo nënbashkësi joboshe S_1 e S e tillë që $S_1\Gamma S_1\Gamma S_1 \subseteq S_1$.

Në qoftë se në Shembullin 2 marrim $S_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ atëherë duket qartë që nënbashkësia S_1 është $\Gamma-$nëngjysmëgrup ternar i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar (S, $_S(\cdot)_\Gamma$).

Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar dhe α, β dy elementë të Γ. Përcaktojmë një shumëzim o në S me anë të barazimit $a o b o c = a\alpha b\beta c$, për çdo tre element të S. Duket qartë që (S, o) është një gjysmëgrup ternar. Ky gjysmëgrup ternar shënohet $S_{\alpha,\beta}$.

PËRKUFIZIM 3.7. *Një Γ–gjysmëgrup ternr quhet Γ–grup ternar në qoftë se për çdo α, $\beta \in \Gamma$, gjysmëgrupi ternar $S_{\alpha,\beta}$ është grup.*

[7] Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar dhe α, β dy elementë të Γ. Një element e i S quhet $\alpha, \beta-$idempotent në qoftë se $e\alpha e\beta e = e$. Bashkësia e të gjitha $\alpha, \beta-$idempotentëve shënohet $E_{\alpha,\beta}$,ndërsa $\bigcup_{\alpha,\beta\in\Gamma} E_{\alpha,\beta}$ shënohet $E(S)$. Elementët e bashkësisë $E(S)$ quhen idempotentë të S. Një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar S quhet $\Gamma-$gjysmëgrup idempotent në qoftë se $S = E(S)$. Në qoftë se e është një $\alpha, \beta-$idempotent i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S, atëherë shënojmë $e\alpha S\beta e\alpha S\beta e$ bashkësinë e elementëve të trajtës $(e\alpha s_1\beta e)\alpha s_2\beta e$ për çdo $s_1, s_2 \in S$ të cilët i shënojmë thjesht $e\alpha s_1\beta e\alpha s_2\beta e$. Bashkësia $e\alpha S\beta e\alpha S\beta e$ është nëngjysmëgrup ternar $S_{\alpha,\beta} = (S, o)$ meqë kemi $e o S o e o S o e = e\alpha S\beta e\alpha S\beta e$. Për më tepër, $\alpha, \beta-$idempotenti është njësh i këtij nëngjysmëgrupi ternar sepse $e o e o e = e$ dhe rrjedhimisht kemi $e o e o (e o S o e o S o e) = (e o e o e) o S o e o S o e = e o S o e o S o e$, $(e o S o e o S o e) o e o e = e o S o (e o S o e o e o e) = e o S o e o S o e$.

3.2 IDEALET DHE KUAZI-IDEALET NË $\Gamma-$GJYSMËGRUPET TERNARE

Në ngjashnëri me gjysmëgrupet ternare janë future koncepti i idelit të majtë, idelit të djathtë, idealit dhe kuazi-idealit në $\Gamma-$gjysmëgrupet ternare.

PËRKUFIZIM 3.8. *Ideal i djathtë [i majtë, lateral] i Γ–gjysmëgrupit ternar (S, $_S(\cdot)_\Gamma$) quhet çdo nënbashkësi joboshe R [L, M] e S e tillë që $R\Gamma S\Gamma S \subseteq R$ [$S\Gamma S\Gamma L \subseteq L$, $S\Gamma M\Gamma S \subseteq M$].*

PËRKUFIZIM 3.9. *Ideal i Γ–gjysmëgrupit ternar $(S, {}_S(\cdot)_\Gamma)$ quhet çdo nënbashkësi joboshe e S e cila është njëherësh ideal i djathtë, i majtë dhe lateral i këtij Γ–gjysmëgrupi ternar.*

PËRKUFIZIM 3.10. *Kuazi-ideal i Γ–gjysmëgrupit ternar $(S, {}_S(\cdot)_\Gamma)$ quhet çdo nënbashkësi joboshe Q e S e tillë që $Q\Gamma S\Gamma S \cap S\Gamma Q\Gamma S \cap S\Gamma S\Gamma Q \subseteq Q$ dhe $Q\Gamma S\Gamma S \cap S\Gamma S\Gamma Q\Gamma S\Gamma S \cap S\Gamma S\Gamma Q \subseteq Q$.*

Duket qartë që çdo ideal i majtë [i djathtë, lateral, ideal, kuazi-ideal] i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S është $\Gamma-$nëngjysmëgrup ternar i S. Po ashtu, çdo ideal i majtë [i djathtë, lateral] i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S është kuazi-ideal i S.

Në ngjashmëri me gjysmëgrupet ternare kemi këtë pohim:

POHIM 3.11. *Një nënbashkësi joboshe Q e Γ–gjysmëgrupit ternar S është një kuazi-ideal i S vetëm atëherë kur është prerje e një ideali të majtë, të djathtë dhe lateral të S.*

VËRTETIM. Supozojmë se nënbashkësia joboshe Q e $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S është kuazi-ideal i këtij gjysmëgrupi ternar. Nuk është e vështirë të provohet që $Q \cup Q\Gamma S\Gamma S$ është ideal i djathtë i S, $Q \cup S\Gamma S\Gamma Q$ është ideal i mjtë i S dhe $Q \cup S\Gamma Q\Gamma S$ është ideal lateral i S. Përfshierja $Q \subseteq (Q \cup Q\Gamma S\Gamma S) \cap (Q \cup S\Gamma Q\Gamma S) \cap (Q \cup S\Gamma S\Gamma Q)$ është e qartë.Anasjelltas. Le të jetë a një element i prerjes $(Q \cup Q\Gamma S\Gamma S) \cap (Q \cup S\Gamma Q\Gamma S) \cap (Q \cup S\Gamma S\Gamma Q)$. Atëherë a −ja është element i Q ose është element i prerjes $Q\Gamma S\Gamma S \cap S\Gamma Q\Gamma S \cap S\Gamma S\Gamma Q$. Meqë Q është kuazi-ideal i S, atëherë në rastin e dytë kemi $a \in Q\Gamma S\Gamma S \cap S\Gamma Q\Gamma S \cap S\Gamma S\Gamma Q \subseteq Q$. Kështu kemi edhe përfshierjen $(Q \cup Q\Gamma S\Gamma S) \cap (Q \cup S\Gamma Q\Gamma S) \cap (Q \cup S\Gamma S\Gamma Q) \subseteq Q$ e cila së bashku me përfshierjen e qartë që përmëndëm më sipër, tregon se $Q = (Q \cup Q\Gamma S\Gamma S) \cap (Q \cup S\Gamma Q\Gamma S) \cap (Q \cup S\Gamma S\Gamma Q)$. Pra, kuazi-ideali Q është prerje e idealit të majtë $Q \cup S\Gamma S\Gamma Q$, idealit lateral $Q \cup S\Gamma Q\Gamma S$ dhe idealit të djathtë $Q \cup Q\Gamma S\Gamma S$. Për të vërtetuar pjesën tjetër të pohimit supozojmë se Q është prerje e idealit të majtë L, idealit lateral M dhe idealit të djathtë R të S. Pra, $Q = L \cap M \cap R$. Meqë L është ideal i majtë, M ideal lateral dhe R ideal i djathtë i S kemi $Q\Gamma S\Gamma S \cap S\Gamma Q\Gamma S \cap S\Gamma S\Gamma Q \subseteq (L \cap M \cap R)\Gamma S\Gamma S \cap S\Gamma(L \cap M \cap R)\Gamma S \cap S\Gamma S\Gamma(L \cap M \cap R) \subseteq L\Gamma S\Gamma S \cap S\Gamma M\Gamma S \cap S\Gamma S\Gamma R \subseteq L \cap M \cap R = Q$ dhe rrjedhimisht Q −ja është kuazi-ideal i $\Gamma-$ gjysmëgrupit ternar S.

Zero e $\Gamma-$ gjysmëgrupit ternar S quhet një element $0 \in S$ i tillë që për çdo element $a, b \in S$ dhe për çdo $\gamma, \delta \in \Gamma$ kemi $a\gamma b\delta 0 = a\gamma 0\delta 0 = a\gamma 0\delta b = 0\gamma a\delta b = 0\gamma 0\delta 0 = 0$.

TEOREMË 3.12. *Për çdo $\Gamma-$gjysmëgrup ternar S pa zero pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1) *Ekziston $\gamma,\delta\in\Gamma$ e tillë që $(S,o)=S_{\gamma,\delta}$ është grup ternar*

2) *$\Gamma-$gjysmëgrupi ternar S nuk ka asnjë kuazi-ideal të ndryshëm nga S*

3) *$\Gamma-$gjysmëgrupi ternar S nuk ka asnjë ideal të djathtë, ideal lateral dhe ideal të majtë të ndryshëm nga S.*

VËRTETIM. 1) $\Rightarrow$2) Supozojmë se pohimi 1) është i vërtetë dhe le të jetë Q një kuazi-ideal i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S dhe a nje element i Q. Atëherë, $S = SoSoa = S\gamma S\delta a = SoaoS = S\gamma a\delta S = aoSoS = a\gamma S\delta S = S\gamma S\delta a \cap S\gamma a\delta S \cap a\gamma S\delta S \subseteq S\Gamma S\Gamma Q \cap S\Gamma Q\Gamma S \cap Q\Gamma S\Gamma S \subseteq Q$ dhe rrjedhimisht $S = Q$.

2) $\Rightarrow$3) Implikimi është i vërtetë meqë çdo ideal i majtë, ideal i djathtë dhe lateral i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S është kuazi-ideal i tij.

3) $\Rightarrow$1) Supozojmë se pohimi 3) është i vërtetë. Le të jenë γ dhe δ dy element të Γ. Për çdo element $a\in S$ bashkësia $a\gamma S\delta S$ është ideal i djathtë i S sepse ajo është joboshe dhe $(a\gamma S\delta S)\Gamma S\Gamma S \subset a\gamma S\delta(S\Gamma S\Gamma S) \subseteq a\gamma S\delta S$. Në mënyrë të ngjashme tregohet se për çdo element $a\in S$ bashkësia $S\gamma S\delta a$ është ideal i majtë i S dhe bashkësia $S\gamma a\delta S$ është ideal lateral i S. Meqë $\Gamma-$gjysmëgrupi ternar S nuk ka ideal të djathtë të ndryshëm nga S, nuk ka ideal të majtë të ndryshëm nga S dhe po ashtu nuk ka ideal lateral të ndreyshëm nga S kemi $a\gamma S\delta S = S, S\gamma a\delta S = S$ dhe $S\gamma S\delta a = S$. Për çdo element $a\in S$ janë të vërteta barazimet: $aoSoS = S, SoSoa = S$ dhe $SoaoS = S$ që tregojnë se $(S,o) = S_{\gamma,\delta}$ është grup ternar.

RRJEDHIM 3.13.. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar pa zero. Në qoftë se $S_{\gamma,\delta} = (S,o)$ është grup ternar për ndonjë $\gamma,\delta\in\Gamma$, atëherë $S_{\gamma,\delta}$ është grup ternar për çdo $\gamma,\delta\in\Gamma$.*

VËRTETIM. Supozojmë se $S_{\gamma,\delta} = (S,o)$ është grup ternar për ndonjë $\gamma,\delta\in\Gamma$. Atëherë, nga Teorema 9.a. $\Gamma-$gjysmëgrupi ternar S nuk ka kuazi-ideale të ndryshëm nga $S-$ja. Përsëri nga kjo teoremë rrjedh që $S_{\gamma,\delta} = (S,o)$ është grup ternar për çdo $\gamma,\delta\in\Gamma$.

Kështu, nga ky rrjedhim kemi:

$\Gamma-$gjysmëgrupi ternar S është grup ternar vetëm atëherë kur ekzistojnë dy elementë $\gamma,\delta\in\Gamma$ i tillë që $S_{\gamma,\delta} = (S,o)$ është grup ternar.

TEOREMË 3.14. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar me zero i tillë që $S\Gamma S\Gamma S \neq 0$. Atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

(i) *Ekziston $\gamma, \delta \in \Gamma$ i tillë që $S_{\gamma,\delta} = (S, o)$ është grup ternar me zero*

(ii) *$\Gamma-$gjysmëgrupi ternar S nuk ka kuazi-ideale të ndryshëm nga zeroja dhe vetë $S-$ja*

(iii) *Të vetmit ideale të djathtë, ideale të majtë dhe ideale lateral të $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S janë zeroja dhe vetë $S-$ja*

VËRTETIM. $(i) \Rightarrow (ii)$ Le të jetë Q një kuazi-ideal i S i ndryshëm nga zero dhe a një element jozero i tij. Atëherë $S = SoSoa = aoSoS = SoaoS = S\gamma S\delta a = a\gamma S\delta S = S\gamma a\delta S = S\gamma S\delta a \cap a\gamma S\delta S \cap S\gamma a\delta S \subseteq S\gamma S\delta Q \cap Q\gamma S\delta S \cap S\gamma Q\delta S \subseteq Q$ dhe kështu $Q = S$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Implikimi është i qartë.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Supozojmë se të vetmit ideale të djathta të S janë 0 dhe vetë S. Për çdo element $a \in S$ të ndryshëm nga zero bashkësia $a \cup a\Gamma S\Gamma S$ është ideal i djathtë i S duke qenë se ajo është joboshe dhe $(a \cup a\Gamma S\Gamma S\,)\Gamma S\Gamma S \subset a\Gamma S\Gamma S \cup (a\Gamma S\Gamma S)\Gamma S\Gamma S \subseteq a\Gamma S\Gamma S \subseteq a \cup a\Gamma S\Gamma S$. Meqenëse S nuk ka ideale të djathtë të ndryshëm nga zero dhe $a \cup a\Gamma S\Gamma S \neq 0$ duke qenë se $a \neq 0$, atëherë kemi $a \cup a\Gamma S\Gamma S = S$. Kështu $a\Gamma S\Gamma S \subseteq (a \cup a\Gamma S\Gamma S\,)\Gamma S\Gamma S = S\Gamma S\Gamma S \neq 0$. Nga ana tjetër kemi që $a\Gamma S\Gamma S$ është ideal i djathtë prandaj $a\Gamma S\Gamma S = S$. Në mënyrë të ngjashme tregohet që $S\Gamma S\Gamma a = S$ dhe $S\Gamma a\Gamma S = S$. Kështu, për çdo element $a \neq 0$ kemi $aoSoS = S, SoaoS = S$ dhe $SoSoa = S$. Këto barzime tregojnë që $S_{\gamma,\delta} = (S, o)$ është grup ternar me zero, për çdo $\gamma, \delta \in \Gamma$.

VËREJTJE 3.15. Është e qartë që 0 dhe vetë S janë ideale të majtë, të djathtë dhe lateralë të S.

RRJEDHIM 3.16. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar me zero i tillë që $S\Gamma S\Gamma S \neq 0$. Në qoftë se $S_\gamma, \delta = (S, o)$ është grup ternar me zero për ndonjë $\gamma, \delta \in \Gamma$, atëherë S_γ është grup ternar me zero, për çdo $\gamma, \delta \in \Gamma$.*

VËRTETIM. Në bazë të Teoremës 3.14. kemi që në qoftë se $S_{\gamma,\delta}$ është grup ternar me zero, për ndonjë $\gamma, \delta \in \Gamma$ atëherë S nuk ka kuazi-ideale të ndryshme nga zero dhe vetë S.Përsëri nga kjo teoremë kemi që (S, o) është grup ternar me zero, për çdo $\gamma, \delta \in \Gamma$.

Le të jetë tani S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar me zero. Atëherë S do të quhet *$\Gamma-$grup ternar me zero* në qoftë se për çdo $\gamma, \delta \in \Gamma$, $S_{\gamma,\delta} = (S, o)$ është grup ternar me zero.

Nga Rrjedhimi 3.16. kemi: *$\Gamma-$gjysmëgrupi ternar me zero S është $\Gamma-$grup ternar me zero vetëm atëherë kur ekziston $\gamma, \delta \in \Gamma$ i tillë që $S_{\gamma,\delta} = (S, o)$ është grup ternar me zero.*

TEOREMË 3.17. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar pa zero. Atëherë janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

(i) S nuk ka ideale të majtë [të djathtë, lateralë] të ndryshëm nga S $-$ja *vetëm atëherë kur* për çdo $s \in S, S\Gamma S\Gamma s = S, [s\Gamma S\Gamma S = S, S\Gamma s\Gamma S = S]$

(ii) Në qoftë se për çdo $s \in S$, $S\Gamma S\Gamma s \cap S\Gamma s\Gamma S \cap s\Gamma S\Gamma S = S$ atëherë S nuk ka kuazi-ideale të ndryshëm nga S $-$ja

VËRTETIM. (i) Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar pa zero i cili nuk ka ideale të majtë [të djathtë, lateralë] të ndryshëm nga S $-$ja. Atëherë, për çdo $s \in S$ kemi që $s\Gamma s\Gamma s \in S\Gamma S\Gamma s$ kështu që $S\Gamma S\Gamma s$ është joboshe. Gjithashtu $S\Gamma S\Gamma(S\Gamma S\Gamma s) \subseteq (S\Gamma S\Gamma S)\Gamma S\Gamma s \subseteq S\Gamma S\Gamma s$. Kështu $S\Gamma S\Gamma s$ është ideal i mjtë i S $-$së prandaj $S\Gamma S\Gamma s = S$.

Anasjelltas. Supozojmë se për çdo $s \in S$, $S\Gamma S\Gamma s = S$. Le të jetë L një ideal i majtë i S $-$së dhe $a \in L$. Nga kushti kemi që për çdo $s \in S$, $S\Gamma S\Gamma a = S$. Meqenëse L është ideal i majtë kemi që $S = S\Gamma S\Gamma a \subseteq S\Gamma S\Gamma L \subseteq L$ dhe rrjedhimisht $S = L$. Kjo tregon që S nuk ka ideale të majtë të ndryshëm nga S $-$ja. Në mënyrë të ngjashme vërtetohet pohimi në rastin e idealit të djathtë dhe lateral.

(ii) Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar pa zero i tillë që për çdo $s \in S, S\Gamma S\Gamma s \cap S\Gamma s\Gamma S \cap s\Gamma S\Gamma S = S$. Le të jetë Q një kuazi-ideal i S $-$së dhe $k \in Q$. Atëherë kemi $S = \Gamma S\Gamma k \cap S\Gamma k\Gamma S \cap k\Gamma S\Gamma S \subseteq \Gamma S\Gamma Q \cap S\Gamma Q\Gamma S \cap Q\Gamma S\Gamma S \subseteq Q$ dhe kështu $S = Q$. Kjo tregon që S nuk ka kuazi-ideale të ndryshëm nga S $-$ja.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet teorema e mëposhtme:

TEOREMË 3.18. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar me zero. Atëherë janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

(i) S nuk ka ideale të majtë [të djathtë, lateralë] të ndryshëm nga zeroja dhe S $-$ja *vetëm atëherë kur* për çdo $s \in S\backslash\{0\}, S\Gamma S\Gamma s = S, [s\Gamma S\Gamma S = S, S\Gamma s\Gamma S = S]$

(ii) Në qoftë se për çdo $s \in S\backslash\{0\}, S\Gamma S\Gamma s \cap (S\Gamma s\Gamma S \cup S\Gamma S\Gamma s\Gamma S\Gamma S) \cap s\Gamma S\Gamma S = S$ atëherë S nuk ka kuazi-ideale të ndryshëm nga S $-$ja.

POHIM 3.19. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar pa zero. Atëherë, prerja e një familjeje joboshe kuazi-idealesh [idealesh të majta, idealesh të djathta, idealesh laterale, idealesh] të $S-$së është kuazi-ideal [ideal i majtë, ideal i djathtë, ideal lateral,ideal] i $S-$së.*

VËRTETIM. Le të jetë $(Q_i)_{i\in I}$ një familje joboshe kuazi-idealesh të $S-$së. Atëherë, për çdo $a,b,c\in\bigcap_{i\in I}Q_i$, $s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6\in S$ dhe $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda,\mu\in\Gamma$ të tillë që $s_1\alpha s_2\beta a=s_3\gamma b\delta s_4=c\lambda s_5\mu s_6$ kemi që $s_1\alpha s_2\beta a=s_3\gamma b\delta s_4=c\lambda s_5\mu s_6\in S\Gamma S\Gamma Q_i\cap S\Gamma Q_i\Gamma S\cap Q_i\Gamma S\Gamma S\subseteq Q_i$, për çdo $i\in I$.Kështu,që$s_1\alpha s_2\beta a=s_3\gamma b\delta s_4=c\lambda s_5\mu s_6\in\bigcap_{i\in I}Q_i$.Kështu$S\Gamma S\Gamma(\bigcap_{i\in I}Q_i)\cap S\Gamma(\bigcap_{i\in I}Q_i)\Gamma S\cap(\bigcap_{i\in I}Q_i)\Gamma S\Gamma S\subseteq\bigcap_{i\in I}Q_i$. Kjo do të thotë që $\bigcap_{i\in I}Q_i$ është kuazi-ideal i $S-$së. Në mënyrë të ngjashme bëhet vërtetimi në rastin e idealit të majtë, idealit të djathtë, idealit lateral dhe idealit.

Në këtë pohim kushti që prerja e familjes së kuazi-idealeve të jetë joboshe është thelbësor. Le të japim një shëmbull. Bashkësia e numrave natyrorë N është një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar në qoftë se marrim $\Gamma=\{1\}$ dhe si shumëzim në N me elementë të Γshumëzimin e zakonshëm. Tregohet lehtë që për çdo $n\in N$ bashkësia $Q_n=\{n+1,n+2,\dots\}$ është kuazi-ideal i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar N por $\bigcap_{i\in I}Q_i$ është boshe sepse për çdo $m\in N, m\notin Q_m$.

Le të jetë X një nënbshkësi joboshe e $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S.Nga pohimi i mësipërm prerja e të gjitha idealeve të majta [idealeve të djathta, idealeve laterale, idealeve, kuazi-idealeve] që përmbajnë X është ideal i majtë [ideal i djathtë, ideal lateral, ideal, kuazi-ideal] i S duke qenë se kjo prerje është joboshe sepse përmban $X\neq\emptyset$. Pikërisht ky ideal i majtë [ideal i djathtë, ideal lateral, ideal, kuazi-ideal] quhet *ideal i majtë [ideal i djathtë, ideal lateral, ideal, kuazi-ideal] i gjeneruar nga X* dhe shënohet $(X)_l\left[(X)_r,(X)_m,(X)_t,(X)_q\right]$.

Tregohet lehtë që :

$$(X)_l=X\cup S\Gamma S\Gamma X$$
$$(X)_r=X\cup X\Gamma S\Gamma S$$
$$(X)_m=X\cup S\Gamma X\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma X\Gamma S\Gamma S$$
$$(X)_t=X\cup S\Gamma S\Gamma X\cup X\Gamma S\Gamma S\cup S\Gamma X\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma X\Gamma S\Gamma S$$
$$(X)_q=X\cup(S\Gamma S\Gamma X\cap(S\Gamma X\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma X\Gamma S\Gamma S)\cap X\Gamma S\Gamma S)$$

POHIM 3.20. *Në qoftë se X është një nënbashkësi joboshe e $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S, atëherë*

$$(X)_q=(X\cup S\Gamma S\Gamma X)\cap(X\cup S\Gamma X\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma X\Gamma S\Gamma S)\cap(X\cup X\Gamma S\Gamma S)=(X)_l\cap(X)_m\cap(X)_r$$

VËRTETIM. Shënojmë $D=(X\cup S\Gamma S\Gamma X)\cap(X\cup S\Gamma X\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma X\Gamma S\Gamma S)\cap(X\cup X\Gamma S\Gamma S)$. Atëherë $D=(X)_l\cap(X)_m\cap(X)_r$. Nga Pohimi 8 kemi që D është një kuazi-ideal i S që përmban X. Kështu $(X)_q\subseteq D$. Përsëri nga Pohimi 8 kemi që $Q=(X)_q$ ka formën $(X)_q=Q=(Q\cup S\Gamma S\Gamma Q)\cap(Q\cup S\Gamma Q\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma Q\Gamma S\Gamma S)\cap(Q\cup Q\Gamma S\Gamma S)$. Ky barazim dhe përfshierja $X\subseteq Q$sjellin$D=(X\cup S\Gamma S\Gamma X)\cap(X\cup S\Gamma X\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma X\Gamma S\Gamma S)\cap(X\cup X\Gamma S\Gamma S)\subseteq(Q\cup S\Gamma S\Gamma Q)\cap(Q\cup S\Gamma Q\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma Q\Gamma S\Gamma S)\cap(Q\cup Q\Gamma S\Gamma S)=Q=(X)_q$. Meqenëse $D=(X)_l\cap(X)_m\cap(X)_r$ rrjedh barazimi i kërkuar.

Në qoftë se bashkësia X përbëhet vetëm nga një element x atëherë kemi:

$$(x)_l=x\cup S\Gamma S\Gamma x$$
$$(x)_r=x\cup x\Gamma S\Gamma S$$
$$(x)_m=x\cup S\Gamma x\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma x\Gamma S\Gamma S$$
$$(x)_t=x\cup S\Gamma S\Gamma x\cup x\Gamma S\Gamma S\cup S\Gamma x\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma x\Gamma S\Gamma S$$
$$(x)_q=x\cup(S\Gamma S\Gamma x\cap(S\Gamma x\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma x\Gamma S\Gamma S)\cap x\Gamma S\Gamma S)$$

Kështu $(x)_q=(x\cup S\Gamma S\Gamma x)\cap(x\cup(S\Gamma x\Gamma S\cup S\Gamma S\Gamma x\Gamma S\Gamma S))\cap(x\cup x\Gamma S\Gamma S)=(x)_l\cap(x)_m\cap(x)_r$.

PËRKUFIZIM 3.21. *Qendër e $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S quhet nënbashkësia* $C(S)=\{a\in S/a\alpha b\beta c=b\alpha a\beta c=b\alpha c\beta a,\ b,c\in S\wedge\alpha,\beta\in\Gamma\}$.

POHIM 3.22. *Në qoftë se $a\beta b\alpha c=b\beta a\alpha c=a\alpha b\beta c$ për çdo $a,b,c\in S$ dhe për çdo $\alpha,\beta\in\Gamma$, atëherë qendra e $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S është $\Gamma-$nëngjysmëgrup ternar i S.*

VËRTETIM. Për çdo tre elemenë $a,b,c\in C(S)$ dhe për çdo $\alpha,\beta\in\Gamma$,$(a\alpha b\beta c)\gamma d\delta e=a\alpha(b\beta c\gamma d)\delta e=a\alpha(b\beta d\gamma c)\delta e=a\alpha(d\beta b\gamma c)\delta e=a\alpha(d\gamma b\beta c)\delta e=(a\alpha d\gamma b)\beta c\delta e=(d\alpha a\gamma b)\beta c\delta e=(d\gamma a\alpha b)\beta c\delta e=d\gamma(a\alpha b\beta c)\delta e$. Në mënyrë të ngjashme vërtetohen barazimet e tjera.

Le të japim tani kuptimin e idealit prim në një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar.

PËRKUFIZIM 3.23. *Një ideal P i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S quhet prim në qoftë se për çdo dy ideale I_1 dhe I_2 të S, $I_1\Gamma I_2\subseteq P\Rightarrow I_1\subseteq P$ ose $I_2\subseteq P$.*

TEOREMË 3.24. *Një ideal P i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S është prim vetëm atëherë kur çdo dy elementë a, b të S, $(a)\Gamma(b)\subseteq P \Rightarrow a \in P$ ose $b \in P$.*

TEOREMË 3.25. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar dhe P një ideal i S. Atëherë P është ideal prim vetëm kur për çdo dy element a, b të S, $(\forall \gamma \in \Gamma, a\gamma b \in P) \Rightarrow (a \in P$ ose $b \in P)$.*

VËRTETIM. Le të jetë P një ideal prim i tillë që $a\Gamma b \subseteq P$ dhe $a \notin P$. Le të jetë x një element i $(a)\Gamma(b)$. Meqenëse $a\gamma b \in P$ tregohet lehtë që $x \in P$. Kështu $(a)\Gamma(b) \subseteq P$ dhe $a \notin P$ prandaj në bazë të Teoremës 3.24 rrjedh që $b \in P$.
Anasjelltas. Le të jenë I_1 dhe I_2 dy ideale të P të tillë që $I_1\Gamma I_2 \subseteq P$ dhe $I_1 \not\subset P$. Kështu, kemi që ekziston një element $a \in I_1$ i tillë që $a \notin P$ dhe $a\Gamma b \subseteq a\Gamma B \subseteq P$. Që këtej rrjedh që $b \in P$. Pra $B \subseteq P$ që tregon se P është ideal prim.

3.3 RELACIONET E GREEN-IT NË $\Gamma-$GJYSMËGRUPET TERNARE

Relacionet e Green-it L, R, M, H në një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar përcaktohen me anë të ekuivalencave:

$$a\mathrm{R}b \Leftrightarrow (a)_r = (b)_r$$
$$a\mathrm{L}b \Leftrightarrow (a)_l = (b)_l$$
$$aMb \Leftrightarrow (a)_m = (b)_m$$
$$a\mathrm{H}b \Leftrightarrow (a)_r = (b)_r \wedge (a)_l = (b)_l \wedge (a)_m = (b)_m$$

Duket qartë që L, R, M, H janë relacione ekuivalence në S dhe H=L∩M∩R.

Në qoftë se shënojmë $a\Gamma S^1\Gamma S^1 = \{a\} \cup a\Gamma S\Gamma S$

$$S^1\Gamma S^1\Gamma a = \{a\} \cup S\Gamma S\Gamma a$$
$$S^1\Gamma a\Gamma S^1 = \{a\} \cup S\Gamma a\Gamma S \cup S\Gamma S\Gamma a\Gamma S\Gamma S,$$

atëherë në bazë të përcaktimit të idealit kryesor të majtë, idealit kryesor të djathtë dhe idealit kryesor lateral kemi:

$$a\mathrm{R}b \Leftrightarrow a\Gamma S^1\Gamma S^1 = b\Gamma S^1\Gamma S^1$$
$$a\mathrm{L}b \Leftrightarrow S^1\Gamma S^1\Gamma a = S^1\Gamma S^1\Gamma b$$
$$a\mathrm{M}b \Leftrightarrow S^1\Gamma a\Gamma S^1 = S^1\Gamma b\Gamma S^1$$
$$a\mathrm{H}b \Leftrightarrow a\Gamma S^1\Gamma S^1 = b\Gamma S^1\Gamma S^1 \wedge S^1\Gamma S^1\Gamma a = S^1\Gamma S^1\Gamma b \wedge S^1\Gamma a\Gamma S^1 = S^1\Gamma b\Gamma S^1.$$

Që këtej kemi:

- aRb në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $a = b$ ose ekzistojnë eleementët s_1, s_2, s_3, s_4 në S dhe elementët $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ në Γ të tillë që $a = b\alpha s_1 \beta s_2$ dhe $b = a\gamma s_3 \delta s_4$.
- aLb në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $a = b$ ose ekzistojnë elementët s_1, s_2, s_3, s_4 në S dhe elementët $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ në Γ të tillë që $a = s_1 \alpha s_2 \beta b$ dhe $b = s_3 \gamma s_4 \delta b$.
- aMb në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $a = b$ ose ekzistojnë elementët s_1, s_2, s_3, s_4 në S dhe elementët $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ në Γ të tillë që $a = s_1 \alpha b \beta s_2$ dhe $b = s_3 \gamma a \delta s_4$ ose ekzistojnë elementët $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$ në S dhe elementët $\alpha, \beta, \gamma, \delta, k, \lambda, \mu, \xi$ në Γ të tillë që $a = s_1 \alpha s_2 \beta b \gamma s_3 \delta s_4$ dhe $b = s_5 k s_6 \lambda a \mu s_7 \xi s_8$.
- aHb në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $a = b$ ose ekzistojnë elementët $s_1, s_2, \dots, s_{20}$ në S dhe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10,} \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{10}$ të tillë që $a = s_1 \alpha_1 s_2 \alpha_2 b, b = s_3 \beta_1 s_4 \beta_2 a, a = b \alpha_3 s_5 \alpha_4 s_6, b = a \beta_3 s_7 \beta_4 s_8$ dhe $a = s_9 \alpha_5 b \alpha_6 s_{10}, b = s_{11} \beta_5 a \beta_6 s_{12}$ ose $a = s_{13} \alpha_7 s_{14} \alpha_8 b \alpha_9 s_{15} \alpha_{10} s_{16}, b = s_{17} \beta_7 s_{18} \beta_8 a \beta_9 s_{19} \beta_{10} s_{20}$

POHIM 3.26. *Relacionet R dhe L janë të përkëmbyeshëm në lidhje me kompozimin e relacioneve, domethënë RoL =LoR.*

VËRTETIM. Meqenëse relacionet R dhe L janë relacione ekuivalence, mjafton të tregojmë që RoL $\subseteq$LoR. Le të jetë $(a, b) \in$ RoL. Atëherë ekziston një $c \in S$ e tillë që aLc dhe cRb. Dallojmë rastet:

Rasti 1. $a = c$. Atëherë aRb dhe meqenëse bLb kemi që $(a, b) \in$ LoR.

Rasti 2. $b = c$. Atëherë aLb dhe meqenëse aRa kemi që $(a, b) \in$ LoR.

Rasti 3. $a \neq c$ dhe $b \neq c$. Atëherë, meqenëse aLc dhe cRb kemi që ekzistojnë elementët $x, y, z, t, u, v, w, k \in S$ dhe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \theta, \varphi \in \Gamma$ të tillë që:

$$x\alpha y\beta a = c, z\gamma t\delta c = a, c\lambda u\mu v = b, b\theta w\varphi k = c$$

Shënojmë $d = z\gamma t\delta c\lambda u\mu v$. Atëherë $a\lambda u\mu v = z\gamma t\delta c\lambda u\mu v = d$ dhe $d\theta w\varphi k = z\gamma t\delta c\lambda u\mu v\theta w\varphi k = z\gamma t\delta b\theta w\varphi k = z\gamma t\delta c = a$. Kështu, kemi që aRd. Gjithashtu kemi që $z\gamma t\delta b = z\gamma t\delta c\lambda u\mu v = d$ dhe $x\alpha y\beta d = x\alpha y\beta z\gamma t\delta c\lambda u\mu v = x\alpha y\beta a\lambda u\mu v = c\lambda u\mu v = b$ që tregojnë se dLb. Pra aRd dhe dLb gjë që tregon se RoL $\subseteq$ LoR.

Në bazë të pohimit të mësipërm kemi që LoR është relacion ekuivalence në S. Edhe ky relacion quhet relacion i Green-it në $\Gamma-$gjysmëgrupin ternar S dhe shënohet D. Pra D=LoR = RoL.

Kështu, për çdo dy element a, b të S, $a\mathrm{D}b$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se ekziston $c \in S$ e tillë që $a\mathrm{R}c$ dhe $c\mathrm{L}b$ ose ekziston $c \in S$ e tillë që $a\mathrm{L}c$ dhe $c\mathrm{R}b$.

Klasat e ekuivalencës të një elemnti $a \in S$ në lidhje me relacionet R,L,M,H,D shënohen përkatësisht R_a, L_a, M_a, H_a, D_a.

TEOREMË 3.27. *Le të jetë S një gjysmëgrup ternar, $\alpha, \beta \in \Gamma$ dhe e një $\alpha, \beta-$idempotent. Atëherë*

(i) $\forall a \in L_e, a\alpha e\beta e = a$

(ii) $\forall a \in R_e, e\alpha e\beta a = a$

VËRTETIM. (i) Le të jetë $a \in L_e$. Atëherë $a\mathrm{L}e$. Kështu $a = e$ ose ekzistojnë $x, y \in S$ dhe $\alpha, \beta \in \Gamma$ të tillë që $a = x\alpha y\beta e$. Në qoftë se $a = e$ atëherë $a\alpha e\beta e = e\alpha e\beta e = e = a$. Në qoftë se $a = x\alpha y\beta e$ atëherë $a\alpha e\beta e = (x\alpha y\beta e)\alpha e\beta e = x\alpha y\beta(e\alpha e\beta e) = x\alpha y\beta e = a$.

(ii) Vërtetimi bëhet në mënyrë të ngjashme me (i)

TEOREMË 3.28. *(Teorema e Green-it për $\Gamma-$gjysmëgrupet ternare) Në qoftë se elementët a, b, c dhe $a\alpha b\beta c$ i përkasin së njëjtës H-klase H, atëherë H është një nëngrup ternar i gjysmëgrupit ternar $S_{\alpha,\beta}$.*

PËRKUFIZIM 3.29. *Elementi a i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S quhet i rregullt në qoftës e ekzistojnë elementët $x, y \in S$ dhe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ të tillë që $a = (a\alpha x\beta a)\gamma y\delta a = a\alpha x\beta(a\gamma y\delta a)$.*

TEOREMË 3.30. *Në qoftë se elementi a i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S është i rregullt, atëherë çdo element i D-klasës D_a është i rregullt.*

VËRTETIM. Meqenëse a është i rregullt, ekzistojnë elementët $x, y \in S$ dhe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ të tillë që $a = (a\alpha x\beta a)\gamma y\delta a = a\alpha x\beta(a\gamma y\delta a)$. Le të jetë $b \in D_a$, domethënë $a\mathrm{D}b$. Atëherë $a\mathrm{L}c$ dhe $c\mathrm{R}b$ për ndonjë element $c \in S$. Meqenëse $a\mathrm{L}c$, $a = c$ ose ekzistojnë $x, y, z, t \in S$ dhe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ të tillë që

$x\alpha y\beta a = c, z\gamma t\delta c = a$. Meqenëse $c\mathrm{R}b$, $b = c$ ose ekzistojnë $u, v, w, k \in S$ dhe $\lambda, \mu, \theta, \varphi \in \Gamma$ të tillë që $c\lambda u\mu v = b, b\theta w\varphi k = c$.

Dallojmë rastet:

Rasti 1. $a = c$ dhe $c = b$. Atëherë $a = b$ dhe kështu elementi b është i rregullt.

Rasti 2. $a = c$ dhe $c\lambda u\mu v = b, b\theta w\varphi k = c$. Atëherë janë të vërteta barazimet:
$\big(b\theta w\varphi(k\alpha x\beta a)\big)\gamma y\delta b = \big((b\theta w\varphi k)\alpha x\beta a\big)\gamma y\delta b = (c\alpha x\beta a)\gamma y\delta b = (c\alpha x\beta a)\gamma y\delta(c\lambda u\mu v) = (a\alpha x\beta a)\gamma y\delta(a\lambda u\mu v) = \big((a\alpha x\beta a)\gamma y\delta a\big)\lambda u\mu v = a\lambda u\mu v = c\lambda u\mu v = b$ që tregojnë se elementi b është i rregullt.

Rasti 3. $x\alpha y\beta a = c, z\gamma t\delta c = a, b = c$. Atëherë janë të vërteta barazimet:
$\big(b\alpha x\beta(a\gamma y\delta z)\big)\gamma t\delta b = (c\alpha x\beta a)\gamma y\delta(z\gamma t\delta b) = (c\alpha x\beta(a\gamma y\delta z))\gamma t\delta b = \big((x\alpha y\beta a)\alpha x\beta(a\gamma y\delta z)\big)\gamma t\delta b = \big((x\alpha y\beta a)\alpha x\beta a\big)\gamma y\delta(z\gamma t\delta b) = \big((x\alpha y\beta a)\alpha x\beta a\big)\gamma y\delta a = \big(x\alpha y\beta(a\alpha x\beta a)\big)\gamma y\delta a = x\alpha y\beta\big((a\alpha x\beta a)\gamma y\delta a\big) = x\alpha y\beta a = b$ që tregojnë se elementi b është i rregullt.

Rasti 4. $x\alpha y\beta a = c, z\gamma t\delta c = a, c\lambda u\mu v = b, b\theta w\varphi k = c$. Atëherë janë të vërteta barzimet:
$\Big(b\theta w\varphi\big(k\alpha x\beta(a\gamma y\delta z)\big)\Big)\gamma t\delta b = \big((b\theta w\varphi k)\alpha x\beta(a\gamma y\delta z)\big)\gamma t\delta b = \big(c\alpha x\beta(a\gamma y\delta z)\big)\gamma t\delta(c\lambda u\mu v) = \big((x\alpha y\beta a)\alpha x\beta(a\gamma y\delta z)\big)\gamma t\delta(c\lambda u\mu v) = \big((x\alpha y\beta a)\alpha x\beta a\big)\gamma y\delta\big((z\gamma t\delta c)\lambda u\mu v\big) = x\alpha y\beta\big((a\alpha x\beta a)\gamma y\delta a\big)\lambda u\mu v = (x\alpha y\beta a)\lambda u\mu v = c\lambda u\mu v = b$ që tregojnë se elementi b është përsëri i rregullt. Kështu, në çdo rast elementi çfarëdo b i D_a është i rregullt.

Kjo teoremë, me fjalë të tjera tregon që :rregullsia e një elementi të një D-klase të një $\Gamma-$gjysmëgrupi ternar e injekton këtë cilësi të çdo element të kësaj D-klase.

Le të jetë D një D-klasë. Nga teorema më sipër, ose çdo element i D është i rregullt ose asnjë element i D s´është i rregullt. Një D-klasë quhet *e rregullt* në qoftë se një element i saj (dhe rrjedhimisht çdo element i saj) është i rregullt.

POHIM 3.31. *Në qoftë se elementi a i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S është i rregullt, atëherë çdo L-klasë dhe çdo R-klasë që përmbahet në D-klasën D_a ka të paktën një element idempotent.*

Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar. Një relacion ekuivalence ρ quhet *kongruencë e djathtë [kongruencë e majtë]* në qoftë se për çdo $a, b, c, d \in S$ dhe për çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$ ëahtë i vërtetë implikimi:

$$(a, b) \in \rho \Rightarrow (a\alpha c\beta d, b\alpha c\beta d) \in \rho$$
$$[(a, b) \in \rho \Rightarrow (d\beta c\alpha a, d\beta c\alpha b) \in \rho].$$

Një relacion ekuivalence ρ në S quhet *kongruencë* në qoftë se është njëherësh kongruencë e majtë dhe kongruencë e djathtë.

Relacioni i Green-it $\mathcal{L}$ [$\mathcal{R}$] është kongruencë e djathtë [kongruencë e majtë] në S. Vërtet, në qoftë se $(a,b) \in \mathcal{L}$ atëherë ose $a = b$ ose ekzistojnë elementët $s_1, s_2, s_3, s_4 \in S$ dhe elementët $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ të tillë që

$a = s_1\alpha s_2\beta b \wedge b = s_3\gamma s_4\delta a.$

Kështu, për çdo $c, d \in S$ dhe për çdo $k, \theta \in \Gamma$ kemi ose

$$akc\theta d = bkc\theta d$$

ose

$$akc\theta d = s_1\alpha s_2\beta(bkc\theta d) \wedge bkc\theta d = s_3\gamma s_4\delta(akc\theta d)$$

dhe rrjedhimisht $(akc\theta d, bkc\theta d) \in \mathcal{L}$.

Në mënyrë të ngjashme tregohet se $\mathcal{R}$ është kongruencë e majtë.

Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar dhe ρ një kongruencë në S. Për çdo $a, a', b, b', c, c' \in S$ dhe për çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$, meqenëse ρ është kongruencë e djathtë dhe kongruencë e majtë, janë të vërteta implikimet:

$\big(a \equiv a'(\rho), b \equiv b'(\rho), c \equiv c'(\rho)\big) \Rightarrow \big(a\alpha b\beta c \equiv a'\alpha b\beta c(\rho), a'\alpha b\beta c \equiv a'\alpha b'\beta c(\rho), a'\alpha b'\beta c \equiv a'\alpha b'\beta c'(\rho)\big) \Rightarrow a\alpha b\beta c \equiv a'\alpha b'\beta c'(\rho).$

Atëherë, për klasat e ekuivalencës sipas $\rho, \bar{a}, \overline{a'}, \bar{b}, \overline{b'}, \bar{c}, \overline{c'}, \overline{a\alpha b\beta c}, \overline{a'\alpha b'\beta c'}$ kemi:

$\bar{a} = \overline{a'}, \bar{b} = \overline{b'}, \bar{c} = \overline{c'} \Rightarrow \overline{a\alpha b\beta c} = \overline{a'\alpha b'\beta c'}.$

Kështu, në bashkësinë faktore S/ρ përcaktohet në mënyrë korrekte veprimi factor nëpërmjet elementëve të Γ me anë të barazimit:

$$\bar{a}\alpha\bar{b}\beta\bar{c} = \overline{a\alpha b\beta c}.$$

Çifti i radhitur $(S/\rho, S/\rho\ (\cdot)_\Gamma)$ është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar meqenëse për çdo $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e} \in S/\rho$ dhe për çdo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ janë të vërteta barazimet:

$(\bar{a}\alpha\bar{b}\beta\bar{c})\gamma\bar{d}\delta\bar{e} = \overline{a\alpha b\beta c}\gamma\bar{d}\delta\bar{e} = \overline{(a\alpha b\beta c)\gamma d\delta e} = \overline{a\alpha b\beta(c\gamma d\delta e)} = \bar{a}\alpha\bar{b}\beta\overline{c\gamma d\delta e} = \bar{a}\alpha\bar{b}\beta(\bar{c}\gamma\bar{d}\delta\bar{e}).$

$\Gamma-$gjysmëgrupi ternar $(S/\rho, S/\rho\ (\cdot)_\Gamma)$ quhet *$\Gamma-$gjysmëgrup faktor sipas kongruencës ρ në S i $\Gamma-$gjysmëgrupit ternar S* dhe kur nuk ka ngatërresa shënohet thjesht S/ρ.

TEOREMË 3.32. *Le të jetë* S *një* $\Gamma-$*gjysmëgrup ternar dhe* ρ *një kongruencë në* S.

1) *Në qoftë se* $\rho\subseteq\mathcal{L}$ *atëherë për çdo dy element* a, b *të* S, $a\ \mathcal{L}\ b$ *vetëm kur* $\bar{a}\ \mathcal{L}\ \bar{b}$ *në* S/ρ

2) *Në qoftë se* $\rho\subseteq\mathcal{R}$ *atëherë për çdo dy element* a, b *të* S, $a\ \mathcal{R}\ B$ *vetëm* $\bar{a}\ \mathcal{R}\ \bar{b}$ *në* S/ρ

3) *Në qoftë se* $\rho\subseteq$ *atëherë për çdo dy element* a, b *të* S, $a\ M\ b$ *vetëm* $\bar{a}\ M\ \bar{b}$ *në* S/ρ

4) *Në qoftë se* $\rho\subseteq H$ *atëherë për çdo dy element* a, b *të* S, $a\ H\ b$ *vetëm kur* $\bar{a}\ H\ \bar{b}$

VËRTETIM. 1) Le të jenë elementët a, b të S të tillë që $a\ L\ b$. Atëherë $a = b$ ose ekzistojnë $x, y, z, t \in S$ dhe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ të tillë që $a = x\alpha y\beta b$ dhe $b = z\gamma t\delta a$. Sqyrtojmë dy rastet e mundshme:

Rasti 1. $a = b$. Atëherë $\bar{a} = \bar{b}$ dhe rrjedhimisht $a\ R\ a$ dhe $\bar{a}\ R\ \bar{a}$ janë që të dyja pohime të vërteta, prandaj janë ekuivalente.

Rasti 2. $a = x\alpha y\beta b$ dhe $b = z\gamma t\delta a$. Atëherë $\bar{a} = \overline{x\alpha y\beta b} = \bar{x}\alpha\bar{y}\beta\bar{b}$ dhe $\bar{b} = \overline{z\gamma t\delta a} = \bar{z}\gamma\bar{t}\delta\bar{a}$ dhe rrjedhimisht $\bar{a}\ L\ \bar{b}$ në S/ρ.

Anasjelltas, supozojmë se për çdo dy element a, b të S kemi $\bar{a}\ L\ \bar{b}$. Pra, $\bar{a} = \bar{b}$ ose ekzistojnë elementët $x, y, z, t \in S$ dhe $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ të tillë që $\bar{a} = \bar{x}\alpha\bar{y}\beta\bar{b}$ dhe $\bar{b} = \bar{z}\gamma\bar{t}\delta\bar{a}$. Shqyrtojmë dy rastet e mundshme:

Rasti 1. $\bar{a} = \bar{b}$. Pra $(a, b) \in \rho$ dhe rrjedhimisht, meqenëse $\rho\subseteq L$ kemi $(a, b) \in L$, domethënë $\bar{a}\ L\ \bar{b}$.

Rasti 2. $\bar{a} = \bar{x}\alpha\bar{y}\beta\bar{b}$ dhe $\bar{b} = \bar{z}\gamma\bar{t}\delta\bar{a}$. Atëherë $\bar{a} = \overline{x\alpha y\beta b}$ dhe $\bar{b} = \overline{z\gamma t\delta a}$. Pra, $(a, x\alpha y\beta b) \in \rho$ dhe $(b, z\gamma t\delta a) \in \rho$. Meqenëse $\rho\subseteq L$ kemi $(a, x\alpha y\beta b) \in L$ dhe $(b, z\gamma t\delta a) \in L$. Kështu:

$$a \in S^1\Gamma S^1(x\alpha y\beta b)\subseteq S^1\Gamma S^1 b = (b)_l$$
$$b \in S^1\Gamma S^1(z\gamma t\delta a)\subseteq S^1\Gamma S^1 a = (a)_l.$$

Që këtej gjejmë barazimin $(a)_l = (b)_l$ dhe rrjedhimisht $a\ L\ b$.

2) dhe 3) tregohen në mënyrë të ngjashme me 1).

4) rrjedh nga tre të parat.

Një kongruencë ρ në S quhet *reduktive e djathtë [reduktive e majtë]* në qoftë se për çdo $a, b, c, d \in S$ dhe për çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$ kemi:

$$(a\alpha c\beta d, b\alpha c\beta d) \in \rho \Rightarrow (a, b) \in \rho$$
$$[(d\beta c\alpha a, d\beta c\alpha b) \in \rho \Rightarrow (a, b) \in \rho].$$

Një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar S quhet *reduktiv i djathtë [reduktiv i majtë]* në qoftë se barazimi në S është një kongruencë reduktive e djathtë [kongruencë reductive e majtë]. Me fjalë të tjera

$\Gamma-$gjysmëgrupi ternar S quhet reduktiv i djathtë [reduktiv i majtë] në qoftë se për çdo $a, b, c, d \in S$ dhe për çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$ barazimi $a\alpha c\beta d = b\alpha c\beta d$ [$d\beta c\alpha a = d\beta c\alpha b$] implikon barazimin $a = b$. Një Γgjysmëgrup ternar quhet reduktiv në qoftë se ai është njëherësh reduktiv i djathtë dhe reduktiv i majtë.

TEOREMË 3.33. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar dhe ρ një kongruencë në S.*

1) Kongruenca ρ është reduktive e djathtë vetëm atëherë kur S/ρ është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar reduktiv i djathtë.

2) Kongruenca ρ është reduktive e majtë vetëm atëherë kur S/ρ është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar reduktiv i majtë.

3) Kongruenca ρ është reductive vetëm atëherë kur S/ρ është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar reduktiv.

VËRTETIM. 1) Le të jetë ρ një kongruencë reduktive e djathtë. Në qoftë se elementët $\bar{a}, \bar{b}$ të S/ρ janë të tillë që për çdo $c, d \in S$ dhe çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$ kemi $\bar{a}\alpha\bar{c}\beta\bar{d} = \bar{b}\alpha\bar{c}\beta\bar{d}$ atëherë $(a\alpha c\beta d, b\alpha c\beta d) \in \rho$ për çdo $c, d \in S$ dhe çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$. Kështu, meqenëse ρ është reduktive e djathtë, kemi $a = b$ dhe rrjedhimisht $\bar{a} = \bar{b}$. Pra S/ρ është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar reduktiv i djathtë. Anasjelltas, supozojmë se S/ρ është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar reduktiv i djathtë. Le të jenë a, b dy element të S të tillë që për çdo $c, d \in S$ dhe çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$ kemi $\overline{a\alpha c\beta d} = \overline{b\alpha c\beta d}$. Pra $\bar{a}\alpha\bar{c}\beta\bar{d} = \bar{b}\alpha\bar{c}\beta\bar{d}$ për çdo $c, d \in S$ dhe çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$. Meqenëse S/ρ është $\Gamma-$gjysmëgrup ternar reduktiv i djathtë, $\bar{a} = \bar{b}$. Kështu $(a, b) \in \rho$.

2) Vërtetimi bëhet në mënyrë të ngjashme me vërtetimin e 1).

3) Rrjedh nga 1) dhe 2).

Përcaktojmë dy relacionet ρ_l dhe ρ_r në $\Gamma-$gjysmëgrup ternar S si më poshtë

$$\rho_l = \{(a, b) \in SxS \,/\, \forall (c, d, \alpha, \beta) \in S^2 x\, \Gamma^2, d\beta c\alpha a = d\beta c\alpha b\},$$

$$\rho_r = \{(a, b) \in SxS \,/\, \forall (c, d, \alpha, \beta) \in S^2 x\, \Gamma^2, a\alpha c\beta d = b\alpha c\beta d\}.$$

Tregohet lehtë që relacioni ρ_l është kongruencë e djathtë në S ndërsa relacioni ρ_r është kongruencë e majtë në S.

Në lidhje me relacionet ρ_l dhe ρ_r janë të vërteta dy teoremat e mëposhtme.

TEOREMË 3.34. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar.*

1) $\Gamma-$gjysmëgrupi ternar S është reduktiv i majtë vetëm atëherë kur $\rho_l = id_S$

2) $\Gamma-$gjysmëgrupi ternar S është reduktiv i djathtë vetëm atëherë kur $\rho_r = id_S$

VËRTETIM. 1) Supozojmë se S është një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar reduktiv i majtë. Le të jenë elementët a, b të S të tillë që $a\rho_l b$. Pra, për çdo $c, d \in S$ dhe çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$ kemi $d\beta c\alpha a = d\beta c\alpha b$. Meqenëse S është reduktiv i majtë, $a = b$ dhe rrjedhimisht $\rho_l = id_S$.
Anasjelltas, supozojmë $\rho_l = id_S$. Le të jenë elementët a, b të S të tillë që $d\beta c\alpha a = d\beta c\alpha b$ për çdo $c, d \in S$ dhe çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$. Pra $(a, b) \in \rho_l$. Meqenëse $\rho_l = id_S$ kemi $a = b$. Kështu S është një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar reduktiv i majtë.
2) Vërtetimi bëhet në mënyrë të ngjashme me vërtetimin e 1).

TEOREMË 3.35. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar i rregullt (quhet i tillë kur çdo element i tij është i rregullt).*

1) $\rho_l \subseteq L$

2) $\rho_r \subseteq R$

VËRTETIM. 1) Le të kemi $(a, b) \in \rho_l$. Atëherë për çdo $c, d \in S$ dhe çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$, $d\beta c\alpha a = d\beta c\alpha b$. Meqenëse $a \in S\Gamma S\Gamma a$ dhe $b \in S\Gamma S\Gamma b$ duke qenë se S është i rregullt, $(a)_l = (b)_l$ domethënë aLb. Kështu $\rho_l \subseteq L$.
2) Vërtetimi bëhet në mënyrë të ngjashme me vërtetimin e 1).

TEOREMË 3.36. *Le të jetë S një $\Gamma-$gjysmëgrup ternar i rregullt.*

1) ρ_l është kongruenca më e vogël e majtë në S

2) ρ_r është kongruenca më e vogël e djathtë në S

VËRTETIM. Le të jenë $a, b \in S$. Supozojmë se për çdo $c, d \in S$ dhe çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$, $(d\beta c\alpha a, d\beta c\alpha b) \in \rho_l$. Pra, për çdo $t_1, t_2, t_3, t_4 \in S$ dhe çdo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$ kemi
$t_1\alpha t_2\beta t_3\gamma t_4\delta a = t_1\alpha t_2\beta t_3\gamma t_4\delta b$ (*)
Për çdo element $t' \in S$, meqenëse S është i rregullt, ekzistojnë $x, y, z \in S$ dhe elementët $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \Gamma$ të tillë që $t' = t'\alpha_1 x\alpha_2 y\alpha_3 z\alpha_4 t'$. Duke marrë në barazimin (*) $t_1\alpha t_2 = t'\alpha_1 x\alpha_2 y\alpha_3 z$ dhe $t_4 = t'$, $\alpha = \alpha_4$ kemi që $(a, b) \in \rho_l$ dhe rrjedhimisht ρ_l është kongruencë reductive e majtë në S.

Nga ana tjetër, le të jetë ρ një kongruencë reductive e majtë në S. Në qoftë se $(a, b) \in \rho_l$, atëherë për çdo $c, d \in S$ dhe çdo $\alpha, \beta \in \Gamma$ kemi $d\beta c\alpha a = d\beta c\alpha b$. Meqenëse ρ është relacion reflektiv, $(d\beta c\alpha a, d\beta c\alpha b) \in \rho$. Kështu $(a, b) \in \rho$ sepse ρ është kongruencë reductive e majtë.

2) Vërtetimi bëhet në mënyrë të ngjashme me vërtetimin e 1).

KAPITULLI 4

MBËSHTJELLËSJA E NJË Γ-GJYSMËGRUPI TË RREGULLT

Në këtë kapitull do të shohim kuazi-idealet dhe renditjen e pjesshme në një $\Gamma-$gjysmëgrup të rregullt. Më tej do të përcaktojmë mbështjellësen e një $\Gamma-$gjysmëgrupi të rregullt si dhe do japim disa veti bazë të mbështjellëse. Gjithashtu do paraqesim dhe disa probleme që lindin natyrshëm.

4.1 Γ-GJYSMËGRUPET E RREGULLT, KUAZI-IDEALET NE TO DHE RENDITJA E PJESSHME

Në artikullin "On Γ-semigroup – I, [24], është dhënë për herë të parë përkufizimi i $\Gamma-$gjysmëgrupit.

PËRKUFIZIM 4.0. *Le të jetë $M=\{a,b,c,\dots\}$ dhe $\Gamma=\{x,y,z,\dots\}$ bashkësi jo-boshe. M është quajtur $\Gamma-$gjysmëgrup në qoftë se,*

(1) $axb\in M$

(2) $(axb)yc=ax(byc)$

për të gjitha $a,b,c\in M$ dhe për të gjitha $x,y\in\Gamma$.

Relacionet analoge të Grinit për $\Gamma-$gjysmëgrupet janë përcaktuar në artikullin [25]. Për to janë përdorur simbolet $\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H}$, Ɗ dhe $\mathcal{J}$. Lidhur me relacionet e Grinit do të shfrytëzojmë edhe artikujt [26], [27], [28].

Në artikullin [29] është dhënë përkufizimi i kuazi-idealit për $\Gamma-$gjysmëgrupet.

PËRKUFIZIM 4.1. *Kuazi-ideal të $\Gamma-$gjysmëgrupit M do të quajmë një nënbashkësi jo-boshe Q të $M-$së e tillë që*

$Q\Gamma M\cap M\Gamma Q\subseteq Q$.

Koleksionin e të gjithë kuazi-idealeve të M do ta shënojmë $Q(M)$.

PËRKUFIZIM 4.2. *Ideal i djathtë [i majtë] i një $\Gamma-$gjysmëgrupi M është një nënbashkësi jo-boshe I e M e tillë që $I\Gamma M\subset I$ $(M\Gamma I\subset I)$. Në qoftë se I është njëkohësisht ideal i majtë dhe i djathtë, atëherë ne themi se I është ideal i M.*

Është e vërtetë teorema e mëposhtme.

TEOREMË 4.3. *Një nënbashkësi jo-boshe e një $\Gamma-$gjysmëgeupi M është kuazi-ideal i $M-$së atëherë dhe vetëm atëherë kur ajo është prerje e një ideali të majtë dhe një ideali të djathtë të $M-$së.*

VËRTETIM. Le të jetë Q një kuazi-ideal i $\Gamma-$gjysmëgrupit M. Atëherë $Q \cup Q\Gamma M$ është ideal i djathtë i $M-$së.

Me të vërtetë,

$$(Q \cup Q\Gamma M)\Gamma M \subseteq Q\Gamma M \cup (Q\Gamma M)\Gamma M \subseteq Q\Gamma M \cup Q\Gamma M$$
$$\subseteq Q \cup Q\Gamma M.$$

Në mënyrë analoge tregohet se edhe $Q \cup M\Gamma Q$ është ideal i majtë i $M-$së.

Është e qartë se $Q \subseteq (Q \cup Q\Gamma M) \cap (Q \cup M\Gamma Q)$, prandaj mbetet të vërtetojmë përfshierjen e kundërt. Për këtë le të jetë a një element i prrejes $(Q \cup Q\Gamma M) \cap (Q \cup M\Gamma Q)$. Kemi ose $a \in Q$ ose $a \in Q\Gamma M \cap M\Gamma Q \subseteq Q$, meqenëse Q është kuazi-ideal i $M-$së. Kështu është e vërtetë përfshierja $(Q \cup Q\Gamma M) \cap (Q \cup M\Gamma Q) \subseteq Q$.

Anasjelltas, le të jenë R dhe L ideal i djathtë, ideal i majtë, përkatësisht të $\Gamma-$gjysmëgrupit M. Vëmë re se $R\Gamma L \subseteq R$ dhe $R\Gamma L \subseteq M\Gamma L \subseteq L$. Prej këtej gjejmë se $R\Gamma L \subseteq R \cap L$, pra $R \cap L$ nuk është boshe. Tani mund të shkruajmë:

$(R \cap \Gamma)\Gamma M \cap M\Gamma(R \cap L) \subseteq R\Gamma M \cap M\Gamma L \subseteq R \cap L$.

Kështu, $R \cap L$ është kuazi-ideal i $M-$së.

PËRKUFIZIM 4.4. [24] *Një element a i një $\Gamma-$gjysmëgrupi M është i rregullt kur $a \in a\Gamma M\Gamma a$, ku $a\Gamma M\Gamma a = \{(axb)ya / b \in M; x, y \in \Gamma\}$.*

Një $\Gamma-$gjysmëgrup M është i rregullt kur çdo element i $M-$së është i rregullt.

Një kuazi-ideal Q është i rregullt në qoftë se çdo element i $Q-$së është i rregullt.

Teorema e mëposhtme na jep një sërë karakterizimesh të kuazi-idealeve kur M është $\Gamma-$gjysmëgrup i rregullt.

TEOREMË 4.5. *Kondit at e mëposhtme në një $\Gamma-$gjysmëgrup M janë ekuivalente.*

(1) *M është i rregullt*

(2) *Për çdo ideal të djathtë R dhe ideal të majtë L të* M *−së, kemi* $R\Gamma L = R \cap L$

(3) *Çdo kuazi-ideal* Q *i* M *−së, ka formën*

$$Q = Q\Gamma M\Gamma Q$$

(4) *Për çdo ideal të djathtë* R *dhe ideal të majtë* L *të* M *−së kemi:*

(a) $R\Gamma R = R;$ (b) $L\Gamma L = L;$ (c) $R \cap L = R\Gamma L$ *është kuazi-ideal i* M.

VËRTETIM. (1) $\Rightarrow$ (2) $R\Gamma L \subseteq M\Gamma L \subseteq L$, meqenëse L është ideal i majtë.

$R\Gamma L \subseteq RLM \subseteq R$, meqenëse R është ideal i djathtë. Si rrjedhim, gjejmë se $R\Gamma L \subseteq R \cap L$.

Supozojmë se M është i rregullt. Le të jetë $a \in R \cap L$. Meqenëse M është i rregullt, për elementin $a \in M$, ekzistojnë $b \in M$ dhe $x, y \in \Gamma$ të tillë që $a = (axb)ya = ax(bya)$. Tani kemi $a = (ax)bya \in axL \subseteq R\Gamma L$.

Meqenëse $R \cap L \subseteq R\Gamma L$, ne kemi që $R \cap L = R\Gamma L$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Le të jetë $a \in M$. Tani, $L = a \cup M\Gamma a$ është ideal i majtë dhe $R = M\Gamma a \cup a$ është ideal i djathtë i M −së. Mund të shkruajmë

$$L = L \cap M = M\Gamma(a \cup M\Gamma a) = M\Gamma a \cup M\Gamma(M\Gamma a)$$
$$\subseteq M\Gamma a \cup M\Gamma a = M\Gamma a.$$

Në mënyrë të ngjashme tregohet se $R \subset a\Gamma M$.

Atëherë kemi:

$$a \in L \cap R \subseteq (M\Gamma a) \cap (a\Gamma M) = (a\Gamma M)\Gamma(M\Gamma a)$$
$$\subseteq a\Gamma(M\Gamma M)\Gamma a \subseteq a\Gamma(M\Gamma a),$$

kështu, a është i rregullt. Prandaj M është i rregullt.

(1) $\Rightarrow$ (3) Le të jetë $a \in Q$. Meqenëse a është i rregullt kemi

$a \in a\Gamma M\Gamma a \subseteq Q\Gamma M\Gamma Q$, pra $Q \subseteq Q\Gamma M\Gamma Q$.

Nga ana tjetër gjejmë

$$Q\Gamma M\Gamma Q \subseteq Q\Gamma M \text{ dhe } Q\Gamma M\Gamma Q \subseteq M\Gamma Q,$$

kështu treguam barazimin

$$Q = Q\Gamma M\Gamma Q.$$

(3) $\Rightarrow$ (1) Nga barazimi $Q = Q\Gamma M\Gamma Q$ është fare e qartë se për çdo element $a \in Q$, kemi $a \in a\Gamma M\Gamma a$, pra a është i rregullt.

(1) $\Rightarrow$ (4) Marrim një element të çfarëdoshëm $a \in R$. Meqenëse M është i rregullt, kemi

$$a \in a\Gamma M\Gamma a \subseteq (R\Gamma M)\Gamma R \subseteq R\Gamma R,$$

pra, $R \subseteq R\Gamma R$. Përfshierja $R\Gamma R \subseteq R$ është e qartë, kështu që kemi të vërtetë barazimin $R = R\Gamma R$. Në mënyrë të ngjashme tregohet edhe barazimi $L\Gamma L = L$. Të tregojmë tani se $R\Gamma L = R \cap L$ është kuazi-ideal i M −së. Është e qartë se $R\Gamma L \subseteq R \cap L$ $(*)$, pra prerja $R \cap L$ nuk është boshe. Tani kemi

$$(R \cap L)\Gamma M \cap M\Gamma(R \cap L) \subseteq R\Gamma M \cap M\Gamma L \subseteq R \cap L,$$

kështu $R \cap L$ është kuazi-ideal i M.

Le të jetë $a \in R \cap L$. Meqenëse a është i rregullt, kemi

$a = axmya$, ku $x, y \in \Gamma$ dhe $m \in M$.

Shkruajmë,

$$a = ax(mya) = axb \in R\Gamma L, \text{ sepse } mya \in L.$$

Treguam përfshierjen $R \cap L \subseteq R\Gamma L$ dhe së bashku me $(*)$ sjellin barazimin $R \cap L = R\Gamma L$.

(4) $\Rightarrow$ (2) Kjo është e qartë. Ndërkohë (2) $\Leftrightarrow$ (1). Pra kemi që (4) $\Rightarrow$ (1).

Le të jetë M një Γ−gjysmëgrup dhe A, B dy nënbashkësi jo-boshe të M. Përcaktojmë shumëzimin $A\Gamma B$ në këtë mënyrë

$$A\Gamma B = \{a\gamma b / a \in A, b \in B; \gamma \in \Gamma\}.$$

E zbatojmë këtë shumëzim në bashkësinë e kuazi-idealeve $\Theta(M)$ dhe kemi teoremën e mëposhtme.

TEOREMË 4.6. *Γ−gjysmëgrupi M është i rregullt atëherë dhe vetëm atëherë kur $Q(M)$ është Γ−gjysmëgrup i rregullt në lidhje me shumëzimin e nënbashkësive të M.*

PËRKUFIZIM 4.7. *Le të jetë M një Γ−gjysmëgrup dhe $a \in M$. Le të jetë $b \in M$ dhe $x, y \in \Gamma$. Për elementin b themi se është një (x, y) invers i a në qoftë se $a = (axb)ya$ dhe $b = (bya)xb$. Në këtë rast ne shkruajmë $b \in V_x{}^y(a)$.*

TEOREMË 4.8. *Le të jetë M një Γ−gjysmëgrup i rregullt, $a = (axb)ya, b \in M$ dhe $x, y \in \Gamma$ të tillë që $b \in V_x{}^y(a)$. Atëherë*

(1) *axb dhe bya janë idempotentë*

(2) $a\mathcal{R}axb\mathcal{L}a, a\mathcal{L}bya\mathcal{R}a$

VËRTETIM. (1) Po tregojmë që axb është idempotent. Kemi

$$axb = [(axb)ya]x[(bya)xb] = (axb)y\big[ax[(bya)xb]\big]$$

$$= (axb)y\big[ax[by(axb)]\big] = (axb)y\big[[(axb)ya]xb\big] = (axb)y(axb).$$

Në mënyrë të ngjashme tregohet se edhe bya është idempotent.

(2) Meqenëse a është i rregullt del se $(a)_r = a\Gamma M$. Elementi axb nga (1) është idempotent dhe si rrjedhim ai është edhe i rregullt, pra $(axb)_r = (axb)\Gamma M$.

Marrim një element të çfarëdoshëm azm nga $a\Gamma M$. Kemi $azm = \big((axb)ya\big)zm = (axb)y(azm) \in (axb)\Gamma M$, pra $(a)_r \subseteq (axb)_r$. Meqenëse përfshierja $(axb)_r \subseteq (a)_r$ është e qartë, kemi barazimin $(a)_r = (axb)_r$, pra $a\mathcal{R}axb$.

Tregohet lehtë se $(a)_l = M\Gamma a$ dhe $(bya)_l = M\Gamma(bya)$. Po të jetë $mz(axb)$ një element nga $(axb)_l$ kemi që $mz(bya) = (mzb)ya \in M\Gamma a = (b)_l$, pra $(bya)_l \subseteq (a)_l$.

Kjo përfshierje së bashku me përfshierjen e qartë $(a)_l \subseteq (bya)_l$ sjellin që $(bya)_l = (a)_l$, pra $a\mathcal{L}bya$.

Në mënyrë të ngjashme tregohet se $axb\mathcal{L}b$ dhe $bya\mathcal{R}b$.

TEOREMË 4.9. *Le të jetë M një $\Gamma-$gjysmëgrup. Një element $a \in M$ është i rregullt atëherë dhe vetëm atëherë kur $(a)_r = eyM$ për ndonjë idempotent $e = eye \in M, y \in \Gamma$.*

VËRTETIM. Në qoftë se elementi $a \in M$ është i rregullt kemi që $a = (axb)ya$ për $b \in M; x, y \in \Gamma$. Shohim se $(axb)y(axb) = [(axb)ya]xb = axb$, pra, axb është idempotent për $x \in \Gamma$. Po të shënojmë $e = axb$ kemi që $e = eye, y \in \Gamma$ dhe $a = eya$.

Meqenëse a dhe e janë elementë të rregullt kemi që $(a)_r = a\Gamma M$ dhe $(e)_r = e\Gamma M$. Po të jetë azm një element i çfarëdoshëm nga $(a)_r$ gjejmë

$$azm = [(axb)ya]zm = (eya)zm = ey(azm) \in e\Gamma M,$$

pra $(a)_r \subseteq e\Gamma M = (e)_r$. Kjo përfshierje së bashku me përfshierjen e qartë $(e)_r \subseteq (a)_r$ sjellin barazimin $(a)_r = (e)_r = eyM$.

Anasjelltas, supozojmë se $(a)_r = eyM$, ku $e = eye, y \in \Gamma$. Meqenëse $(a)_r = a \cup a\Gamma M$ rrjedh se $a = eym$ për ndonjë $m \in M$ dhe $e = a$ ose $e = a\delta b$ për ndonjë $\delta \in \Gamma$ dhe $b \in M$. Tani, $e\gamma a = e\gamma(e\gamma m) = (e\gamma e)\gamma m = e\gamma m = a$. Prandaj, $a = e\gamma a = (a\delta b)\gamma a$, pra a është i rregullt.

TEOREMË 4.10. Le të jetë M një $\Gamma-$gjysmëgrup. Në qoftë se $a = ax(bya)$ ku $b \in M$ dhe $x, y \in \Gamma$, është një element i rregullt në M atëherë $(a)_r = axM$ dhe $(a)_l = Mya$.

VËRTETIM. Dimë se $(a)_r = a\Gamma M \cup a$. Meqenëse $a = (axb)ya = ax(bya) \in a\Gamma M$ del se $(a)_r = a\Gamma M$. Marrim një element të çfarëdoshëm $a\gamma m$ nga $a\Gamma M$. Kemi

$$a\gamma m = [(axb)ya]\gamma m = [ax(bya)]\gamma m = ax[(bya)\gamma m] \in axM, \text{ pra } a\Gamma M \subseteq axM.$$

Meqenëse përfshierja $axM \subseteq a\Gamma M$ është e qartë, kemi barazimin $(a)_r = axM$.

Në mënyrë të ngjashme tregohet edhe barazimi $(a)_l = Mya$.

TEOREMË 4.11. *Le të jetë M një $\Gamma-$gjysmëgrup i rregullt dhe $a \in M$. Le të jenë gjithashtu $e = exe$ dhe $f = fyf$ dy idempotentë të tillë që $e\mathcal{R}a\mathcal{L}f$. Atëherë ekziston $b \in {V_y}^x(a)$ i vetëm i tillë që $ayb = e$ dhe $bxa = f$.*

VËRTETIM. Meqenëse $e\mathcal{R}a$ ne kemi që $e\Gamma M = a\Gamma M$. Atëherë ekzistojnë $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ dhe $c, d \in M$ të tillë që $e = a\gamma_1 c$ dhe $a = e\gamma_2 d$. Tani kemi

$$exa = ex(e\gamma_2 d) = (exe)\gamma_2 d = e\gamma_2 d = a.$$

Gjithashtu, meqenëse $a\mathcal{L}f$, ne kemi $M\Gamma a = M\Gamma f$. Prej këtej gjejmë se $a = m_1\delta_1 f$ dhe $f = m_2\delta_2 a; m_1, m_2 \in M; \delta_1, \delta_2 \in \Gamma$. Shkruajmë, $a = m_1\delta_1 f = m_1\delta_1(fyf) = (m_1\delta_1 f)yf = ayf$.

Le të jetë $b = f\gamma_1 c$. Atëherë kemi $ayb = ay(f\gamma_1 c) = (ayf)\gamma_1 c = a\gamma_1 c = e$. Prandaj $(ayb)xa = exa = a$.Gjithashtu $(bxa)yb = [(f\gamma_1 c)xa]yb = \big[[(m_2\delta_2 a)\gamma_1 c]xa\big]yb =$

$\big[[m_2\delta_2(a\gamma_1 c)xa]\big]yb = [(m_2\delta_2 e)xa]yb = [m_2\delta_2(exa)]yb = (m_2\delta_2 a)yb = fyb =$

$fy(f\gamma_1 c) = (fyf)\gamma_1 c = f\gamma_1 c = b$. Kështu del se $b \in {V_y}^x(a)$. Gjithashtu kemi

$$\begin{aligned} bxa &= (f\gamma_1 c)xa = [(m_2\delta_2 a)\gamma_1 c]xa = [m_2\delta_2(a\gamma_1 c)]xa \\ &= (m_2\delta_2 e)xa = m_2\delta_2(exa) = m_2\delta_2 a = f. \end{aligned}$$

Kështu b plotëson barazimet $bxa = f$ dhe $ayb = e$.

Të tregojmë tani unicitetin. Supozojmë se ekziston një $b' \in {V_y}^x(a)$ e tillë që $ayb' = e$ dhe $bxa = f$. Atëherë gjejmë

$$b' = (b'xa)yb' = b'x(ayb') = b'x(ayb) = (b'xa)yb = (bxa)yb = b.$$

Një mjet i rëndësishëm në studimin e $\Gamma-$gjysmëgrupeve të rregullt është *renditja e pjesshme natyrale.* Le të jetë M një $\Gamma-$gjysmëgrup i rregullt. Në të ne përcaktojmë relacionet e Grinit nëpërmjet idealeve kryesorë. Renditja e përfshierjes midis idealeve kryesorë sjell një renditje midis klasave të ekuivalencës.

$L_a \leq L_b$ në qoftë se $M\Gamma a \subseteq M\Gamma b$

$R_a \leq R_b$ në qoftë se $a\Gamma M \subseteq b\Gamma M$

$J_a \leq J_b$ në qoftë se $M\Gamma a\Gamma M \cup a\Gamma M \cup M\Gamma a \subseteq M\Gamma b\Gamma M \cup b\Gamma M \cup M\Gamma b$.

Bashkësinë e idempotentëve të një $\Gamma-$gjysmëgrupi M do e shënojmë me $E(M)$. Kur A është një nnëbashkësi e M atëherë $E(A) = A \cap E(S)$.

PËRKUFIZIM 4.12. *Le të jetë M një $\Gamma-$gjysmëgrup i rregullt. Përcaktojmë $a \leq b$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $R_a \leq R_b$ dhe $a = exb$, për ndonjë $e \in E(R_a), x \in \Gamma$. Në qoftë se e dhe f janë idempotentë, atëherë $e \leq f$ vetëm atëherë kur ekzistojnë $x, y \in \Gamma$ të tillë që $exe = e, fyf = f$ dhe $e = exf = fye$.*

Tek [26] është treguar se plotësimi i kushteve të përkufizimit të mësipërm për $E(M)$ sjell që kemi të bëjmë me një renditje të pjesshme.

TEOREMË 4.13. *Le të jenë a dhe b elementë të $\Gamma-$gjysmëgrupit të rregullt M. Atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente*

(1) $a \leq b$

(2) *Për çdo $f \in E(R_b)$ ekziston $e \in E(R_a)$ të tillë që $e \leq f$ dhe $a = exb$, për ndonjë $x \in \Gamma$*

(3) *Për çdo $f \in E(R_b)$ ekziston $e \in E(R_a)$ të tillë që $e \leq f$ dhe $a = bya$, për ndonjë $y \in \Gamma$*

(4) *$R_a \leq R_b$ dhe $a = byf$ për ndonjë $f \in E(L_a), y \in \Gamma$*

VËRTETIM. (1)$\Rightarrow$(2) Le të jetë $f \in E(R_b)$, pra, $f = fyf, y \in \Gamma$. Meqenëse $f \in R_b$ del se $fyM = (b)_r$. Nga $a \in R_a$, ekziston $e \in R_a$, ku $e = exe, x \in \Gamma$, e tillë që $a\Gamma M = exM \subseteq f\Gamma M = fyM$. Tani ekziston $m \in M$ e tillë që $e = fym$. Kemi

$$e = fym = (fyf)ym = fy(fym) = fye.$$

Meqenëse $e \in R_a, f \in R_b$, kemi që $(e)_r = (a)_r$ dhe $(f)_r = (b)_r$. Kjo sjell që $e \leq f$ dhe $e = exf$.
(2)$\Rightarrow$(1) Meqenëse $f \in E(R_b)$ dhe $e \in E(R_a)$ del se $(e)_r = (a)_r$, $(f)_r = (b)_r$. Nga $e \leq f$, pra $(e)_r \subseteq (f)_r$ del se $(a)_r \subseteq (b)_r$, pra $R_a \leq R_b$. Kjo së bashku me $a = exb$ për ndonjë $x \in \Gamma$ sjellin që $a \leq b$. Kështu treguam se (1)$\Leftrightarrow$(2).
Në mënyrë të ngjashme tregohet se (1)$\Leftrightarrow$(3).
(1)$\Rightarrow$(4) Le të jetë $a = (azc)ta$ një element i rregullt i $\Gamma-$gjysmëgrupit M. Nga Teorema 4.10, $(a)_l = Mta$. Marrim një element $mta; m \in M, t \in \Gamma$ nga $(a)_l$. Kemi gjithashtu që $a = exb$ për

ndonjë $e \in E(R_a), x \in \Gamma$. Atëherë $mta = mt(axb) = (mta)xb \in Mxb \subseteq (b)_l$. Pra, gjetëm se $(a)_l \subseteq (b)_l$, që tregon se $L_a \leq L_b$.

Le të jetë M një $\Gamma-$gjysmëgrup i rregullt në të cilin është përcaktuar relacioni i renditjes $\leq$. Atëherë $(M, \leq)$ është quajtur *poset*. Në qoftë se $(M, \leq)$ është poset atëherë një nënbashkësi A e M quhet *ideal i renditur* në qoftë se $a \leq b \in A$ sjell $a \in A$. Nënbashkësia $[b] = \{a \mid a \in A$ dhe $a \leq b\}$ quhet ideal kryesor i renditur i M. Rezultati i mëposhtëm na tregon kur një $\Gamma-$nëngjysmëgrup i rregullt është ideal i renditur duke u mbështetur tek idempotentët.

TEOREMË 4.14. *Le të jetë N një $\Gamma-$nëngjysmëgrup i rregullt i $\Gamma-$gjysmëgrupit të rregullt M. Atëherë $E(N)$ është ideal i renditur i $E(M)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur N është ideal i renditur i M.*

VËRTETIM. Le të jetë $E(N)$ ideal i renditur i $E(M)$ dhe supozojmë se $a \leq b$ në N. Nga Teorema 8, në qoftë se $f \in E(R_b) \cap N$, atëherë ekziston $e \in E(R_a)$ i tillë që $e \leq f$ dhe $a = exb$, për ndonjë $x \in \Gamma$. Nga supozimi $e \in N$ kështu që $a \in N$.

E anasjellta është e qartë.

PËRKUFIZIM 4.15. *Le të jetë M një $\Gamma-$gjysmëgrup i rregullt. Prodhimi gjurmë i dy elementëve $a, b \in M$ që shënohet $a\ o\ b$ është*

$$a\ o\ b = axb \in R_a \cap L_b \text{ për } x \in \Gamma.$$

Është e vërtetë teorema e mëposhtme.

Në qoftë se e dhe f janë idempotentë të $\Gamma-$gjysmëgrupit M, atëherë bashkësia *sandwich* e $e-$së dhe $f-$së, që shënohet $S(e,f)$, përcaktohet

$$S(e,f) = \{\, h \in E(S) \mid \left(f\gamma_1 h\right)\delta_1 e = h \text{ dhe } \left(e\gamma_2 h\right)\delta_2 f = e\gamma f;\ \delta_1, \delta_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma\}.$$

Në qoftë se M është i rregullt bashkësitë sanduiç janë gjithmonë jo-boshe. Tregohet pa vështirësi se $h \in S(e,f)$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $h \in E(S) \cap f\Gamma V\left(e\gamma_2 f\right)\Gamma e$.

TEOREMË 4.16. *Le të jetë M* një *$\Gamma-$gjysmëgrup i rregullt.*

(1) *$a\ o\ b$ ekziston atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston $x \in V(a)$ dhe $y \in V(b)$ të tillë që $x\gamma a = b\gamma y, \gamma \in \Gamma$*

(2) *Le të jenë $a, b \in M, a' \in V(a), b' \in V(b)$ dhe $h \in S(a'\gamma a, b\delta b')$. Atëherë*

$a\gamma_1 b = (a\gamma_2 h) \bullet (h\gamma_3 b)$ *dhe* $b'\gamma_4 h\gamma_5 a' \in V(a\gamma_6 b)$, *ku* $\gamma, \delta, \gamma_i \in \Gamma$.

(3) *Le të jenë* $a_1, \dots, a_n \in M, a'_1 \in V(a_1)$ *dhe* $a'_n \in V(a_n)$. *Atëherë*

$V(a_1\gamma_1 a_2 \dots \gamma_n a_n) \cap a'_n \Gamma S \Gamma a'_1 \neq \emptyset$.

Një rezultat i përdorshëm është edhe teorema e mëposhtme.

TEOREMË 4.17. *Le të jetë* M *një* $\Gamma-$*gjysmëgrup i rregullt.*

(1) *Në qoftë se* $b\mathfrak{D}b'$, *atëherë për çdo* $a \leq b$, *ekziston* $a'\mathfrak{D}a$ *i tillë që* $a' \leq b'$

(2) $M\Gamma a\Gamma M \subseteq M\Gamma b\Gamma M$ *atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston* b' *i tillë që* $a\mathfrak{D}b' \leq b$.

4.2 VETITË BAZË TË MBËSHTJELLËSES

Këtu do paraqesim vetitë bazë të mbështjellëses së një $\Gamma-$gjysmëgrup të rregullt duke ngritur natyrshëm dhe disa probleme lidhur me të.

PËRKUFIZIM 4.18. *Le të jetë* M *një* $\Gamma-$*gjysmëgrup i rregullt.* M *është mbështjellëse e një* $\Gamma-$*gjysmëgrupi të rregullt* S *në qoftë se* $S\Gamma M\Gamma S = S$ *dhe* $M\Gamma S\Gamma M = M$.

Kjo është ekuivalente me atë që të themi se $S \in V(M)$ në $\Gamma-$gjysmëgrupin $Q(M)$ të të gjithë kuazi-idealeve të M (Teorema 4.6). Më në përgjithësi, ne themi se një $\Gamma-$gjysmëgrup i rregullt M është mbështjellëse e një $\Gamma-$gjysmëgrupi të rregullt S në qoftë se ekziston një zhytje $i: S \to M$ e tillë që M është mbështjellëse e $i(S)$.

Më poshtë po japim një sërë karakterizimesh alternative të mbështjellesve. Le të jetë S një $\Gamma-$nëngjysmëgrup i rregullt i një $\Gamma-$gjysmëgrupi të rregullt M.

Do të përcaktojmë tre veti të cilave do tiu drejtohemi më vonë.

(F_1) $E(S)$ është ideal i renditur i $E(M)$

(F_2) Në qoftë se $a \in M$ dhe për ndonjë $a' \in V(a), a'\gamma a = a\gamma a' \in S$, $\forall \gamma \in \Gamma$, atëherë $a \in S$

(F_3) Për çdo $e \in E(M)$, ekziston $f \in E(S)$ e tillë që $e\mathfrak{D}f$.

TEOREMË 4.19. *Le të jetë* S *një* $\Gamma-$*nëngjysmëgrup i rregullt i* $\Gamma-$*gjysmëgrupit të rregullt* M.

(1) S *është një kuazi-ideal i* M *atëherë dhe vetëm atëherë kur janë të vërteta* (F_1) *dhe* (F_2)

(2) *M është mbështjellëse e S atëherë dhe vetëm atëherë kur S është kuazi-ideal i M dhe (F_3) është e vërtetë.*

VËRTETIM. Meqenëse S është $\Gamma-$nëngjysmëgrup i rregullt, nga Teorema 4.5 (3), kemi që $S = S\Gamma M\Gamma S$. (F_1) është e vërtetë: le të jetë $f \leq e \in E(S)$. Kemi $exe = e, fyf = f$ dhe $f = fye = exf, x, y \in \Gamma$. Tani mund të shkruajmë

$$f = exf = ex(fye) \in S\Gamma M\Gamma S = S.$$

Kështu $f \in E(S)$.

Të tregojmë se edhe (F_2) është e vërtetë. Le të jetë $a \in M$ dhe $a' \in V(a)$, ku $a'\gamma a = a\gamma a'$, për çdo $\gamma \in \Gamma$, i përkasin S.

Atëherë shkruajmë $a = (asa')ta$ dhe $a' = (a'ta)sa', s, t \in \Gamma$.

Tani kemi $a = (asa')ta' = (asa')t\left((a'ta)\delta a'\right)$

$$= (asa')t\left(a't(a\delta a')\right) \in S\Gamma M\Gamma S = S.$$

Pë r të vë rtetuar të anasjelltë n supozojmë se (F_1) dhe (F_2) janë të vë rteta. Në bazë të Teoremë s 4.5 ne duhet të tregojmë barazimin $S = S\Gamma M\Gamma S$. Meqenë se perfshierja $S \subseteq S\Gamma M\Gamma S$ ë shtë e qartë , ne duhet të tregojmë pë rfshierjen $S\Gamma M\Gamma S \subseteq S$. Le të jetë $(u\gamma m)\delta w \in S\Gamma M\Gamma S$, ku $u, w \in S; \gamma, \delta \in \Gamma, m \in M$. Zgjedhim $u' \in V(u) \cap S$ dhe $w' \in V(w) \cap S$. Nga Teorema 4.6 (3), ekziston $c \in V\big((u\gamma m)\delta w\big) \cap w'\Gamma M\Gamma u'$, atë herë $c = \big(w'\gamma_1 n\big)\gamma_2 u'$, pë r ndonjë $n \in M; \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Tani ë shtë e qartë se

$$\big((n\gamma m)\delta w\big)zc \leq u\gamma_3 u' \text{ dhe } c\gamma_3\big((u\gamma m)\delta w\big) \leq w'\gamma_4 w.$$

Nga (F_1), $\big((n\gamma m)\delta w\big)zc, c\gamma_3\big((u\gamma m)\delta w\big) \in S$. Atë herë në bazë të (F_2), kemi që $(u\gamma m)\delta w \in S$.

Tek (2) po provojmë të anasjelltë n. Meqenë se S ë shtë $\Gamma-$në ngjysmëgrup i rregullt i M dhe kuazi-ideal i M, kemi që $S\Gamma M\Gamma S = S$ (Teorema 4.5). Na mbetet vetëm të tregojmë përfshierjen $M \subseteq M\Gamma S\Gamma M$.

Marrim në shqyrtim rastin kur S është një kuazi-ideal i rregullt i një $\Gamma-$gjysmëgrupi të rregullt M por (F_3) nuk është e nevojshme të jetë e vërtetë.

Përcaktojmë

$$\xi_M(S) = \{\, m \in M \mid m\mathcal{D}s, \text{ për ndonjë } s \in S \,\}.$$

Kemi rezulttain e mëposhtëm

TEOREMË 4.20. *Le të jetë S një kuazi-ideal i rregullt i një $\Gamma-$gjysmëgrupi të rregullt M. Shënojmë $M' = \xi_M(S)$. Atëherë*

(1) *M' është ideal i renditur i M*

(2) *$M' = M\Gamma S\Gamma M$*

(3) *M' është $\Gamma-$nëngjysmëgrup i rregullt i M*

(4) *M' është një mbështjellëse e S*

Vërtetimi i pjesës së fundit të Teoremës 4.5 na jep një metodë të rëndësishme për gjetjen e çifteve inverse (Përkufizimi 4.7).

TEOREMË 4.21. *Le të jetë M një mbështjellëse e S. Atëherë, për çdo çift invers (a, a') në M, ekzistojnë çiftet inverse (b, b') dhe (c, c') në M dhe një çift invers (s, s') në S të tillë që*

$$a = b\ o\ s\ o\ c', b\gamma_1 b' = a\delta_1 a', s\delta_2 s' = a'\gamma_2 a, b'\gamma_3 b = s\delta_3 s', c'\gamma_4 c = s'\delta_4 s.$$

TEOREMË 4.22. *Le të jetë M një mbështjellëse e S që përmban T si një kuazi-ideal të rregullt. Shënojmë $S' = \xi_M(T) \cap S$. Atëherë $\xi_M(T)$ është një mbështjellëse e S' dhe T.*

TEOREMË 4.23. *Le të jetë M një mbështjellëse e $\Gamma-$gjysmëgrupit të rregullt S.*

(1) *Për çdo $Q \in Q(S)$ ne kemi që $Q\Gamma M\Gamma Q \in Q(M)$*

(2) *Për çdo $Q \in Q(S)$ ne kemi që $Q\Gamma M\Gamma Q = Q$*

(3) *Në qoftë se $Q \in Q(M)$ dhe $Q \subseteq S$, atëherë $Q \in Q(S)$*

(4) *$Q(M)$ është një mbështjellëse e $Q(S)$*

Lidhur me sjelljen e mbështjellëses ndaj homomorfizmave kemi këtë teoremë.

TEOREMË 4.24. (1) *Le të jetë M një mbështjellëse e S dhe $h: M \rightarrow N$ një homomorfizëm syrjektiv, N është $\Gamma-$gjysmëgrup i rregullt. Atëherë N është një mbështjellëse e $h(S)$*

(2) *Le të jetë M një mbështjellëse e S dhe S është një mbështjellëse e N. Atëherë M është një mbështjellëse e N.*

Për $\Gamma-$gjysmëgrupet janë përcaktuar relacionet analoge të Grinit. Për mbështjellëset e $\Gamma-$gjysmëgrupeve ngrihen dy probleme:

1. Në qoftë se kemi një mbështjellëse S të $\Gamma-$gjysmëgrupit M, cila është marëdhënia midis relacioneve $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{J}$ në M me relacionet $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{J}$ në S ?

2. Në qoftë se S është një mbështjellëse e M dhe kemi që $\mathcal{J}(M) = \mathcal{D}(M)$, a është i vërtetë barazimi $\mathcal{J}(S) = \mathcal{D}(S)$? Po anasjelltas ?

PËRFUNDIME

Në këtë tezë disertacioni kemi bërë një studim mbi gjysmëgrupet ternare, Γ-gjysmëgrupet ternare dhe Γ-gjysmëgrupet e rregullt. Kemi studiuar idealet, kuazi-idealet, bi-idealet në gjysmëgrupet ternare në përgjithësi si dhe kemi bërë një studim të veçantë mbi pothuajse nëngjysmëgrupet ternare, pothuajse idealet, pothuajse idealet e brendshëm, pothuajse kuazi-idealet dhe pothuajse bi-idealet të cilat përbëjnë një risi në këtë tezë si dhe përbëjnë një objekt studimi edhe në vazhdim. Kemi trajtuar disa çështje të rëndësishme lidhur me Γ-gjysmëgrupet ternare. Gjithashtu kemi paraqitur kuazi-idealet dhe renditjen e pjesshme në një $\Gamma-$gjysmëgrup të rregullt. Më tej kemi përcaktuar mbështjellësen e një $\Gamma-$gjysmëgrupi të rregullt dhe kemi dhënë disa veti bazë të mbështjellëses duke ngritur dhe disa probleme që lindin natyrshëm në lidhje me mbështjellësen.

Të gjitha nocionet që këmi paraqitur, vetitë që lidhen me to na ndihmojnë për të përcaktuar strukturën e gjysmëgrupeve ternare, Γ-gjysmëgrupeve ternare dhe Γ-gjysmëgrupeve të rregullt.

Teoria e gjysmëgrupeve gjen zbatime të shumta në shkencat kompjuterike e kryesisht në Elektronikë.

Bibliografia

[1] F.M. Sioson, Ideal Theory in Ternary Semigroups, Math.Jpn. **10**, 63-84 (1965)

[2] S.Kar and B.K.Maity, Congruences on Ternary Semigroups, Journal of the Chungcheong Mathematical Society **20**, (2007)

[3] Otto Steinfeld, Quasi-Ideals in Rings and Semigroups, Akademia Kiado, Budapest (1978)

[4] V.N.Dixit and Sarita Dewan, A Note on Quasi and Bi-Ideals in Ternary Semigroups, Internat.J.math&Math.Sci. **18**, 501-508 (1995)

[5] A.H. Clifford, G.B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups Vol 1, American Mathematical Society (1961)

[6] John M. Howie, Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press Oxford (1995)

[7] Dasari Madhusudhana Rao, Structure and Study of Elements in Ternary Γ-Semigroups

[8] D.H. Lehmer, A Ternary Analogue of Abelian Groups, Am.J.Math. **54**, 329-338 (1932)

[9] J.Los, On the Extending of Models I.Fundam. Math. **42**, 38-54 (1955)

[10] J.von Neumann, On Regular Rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **22**, 707-713 (1936)

[11] T. K. Dutta and S. Kar, On regular ternary semirings, Advances in Algebra, Proccedings of the ICM Satellite Conference in Algebra and Related Topics, World Scientific, new Jersey, 2003, pp. 343-355

[12] V. N. Dixit and S. Dewan, Minimal quasi-ideals in ternary semigroups, Indian j. pure Appl. Math. **28** (1997), 255-632

[13] S. Lajos, On the bi-ideals in semigroups, Proc. Japan Acad., **45** (1969), 710-712

[14] R. A. Good and D. R. Hughes, Associated groups for a semigroup, Bull. Amer. Math. Soc. **58** (1952), 624−625

[15] N. Kaopusek, Th. Kaewnoi and R. Chinram, On almost interior ideals and weakly almost interior ideals of semigroups, Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 2020

[16] K. Wattanatripop, R. Chinram and T. Changphas, Fuzzy almost bi-ideals in semigroups, International Journal of Mathematics and Computer Science **13** (2018), 51-58

[17] S. Suebsung, R. Chinram and T. Kaewnol, A note on almost hyperideals in semihypergroups, International Journal of Mathematics and Computer Science 2020

[18] N. Tiprachot and N. Lekkoksung, A note on almost α-ideals in semigroups, International Journal of Mathematics and Computer Science **17** (2022), 325-330

[19] K. Wattanatripop, R. Chinram and T. Changphas, Quasi-A-ideals anf fuzzy A-ideals in semigroups, Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography 2018, 1131-1138

[20] S. Suebsung, K. Hila, R. Chinram and A. Iampan, On almost bi-ideals and almost quasi-ideals of ordered semigroups and their fuzzifications, ICIC Express Letters 2022

[21] A. Peposhi, A note on ideals and regularity in ternary semigroups, IJIREM 2020

[22] A. Peposhi, Characterization of ternary semigroups by quasi-ideals, JMEST 2020

[23] A. Peposhi and Th. Xhillari, Some characterizations of ternary semigroups by bi-ideals, International Journal of Algebra 2021

[24] M. K. Sen and N. K. Saha (1985), On Γ-semigroup - I, Bull. Cal. Math. Soc. **78**, 180-186 (1986)

[25] N. K. Saha, On Γ-semigroup - II, Bull. Cal. Math. Soc. **79**, 331-335 (1987)

[26] N. K. Saha, On Γ-Semigroup - III, Bull. Cal. Math. Soc. **80**, 1-12 (1988)

[27] T. K. Dutta and T. K. Chatterife, Green′s equivalences on Γ-semigroup, Bull. Cal. Math. Soc. **80**, 30-35 (1987)

[28] P. Petro and Th. Xhillari, Green′s theorem and quasi-ideals in Γ-semigroups, International Journal of Algebra Vol 5, 2011, no. **10**, 461-470

[29] Th. Xhillari, Kuazi-idealet ne Γ-gjysmegrupe, Buletini i Shkencave Natyrore nr **5**, 16-24 (2008)